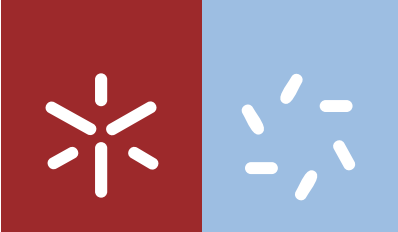


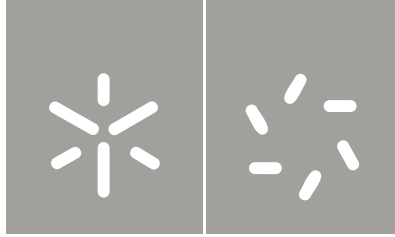


Susana Manuela Nunes Ribeiro

Modelação estocástica nas ciências atuariais

Universidade do Minho
Escola de Ciências





Universidade do Minho
Escola de Ciências

Susana Manuela Nunes Ribeiro

Modelação estocástica nas ciências atuariais

Tese de Mestrado
Mestrado em Estatística

Trabalho efetuado sob a orientação da
Professora Doutora Patrícia Gonçalves

Janeiro de 2013

Agradecimentos

Este trabalho só foi possível graças à preciosa colaboração, direta ou indiretamente, de diversas pessoas, às quais gostaria de deixar umas palavras de reconhecimento e de agradecimento, em especial:

à Doutora Patrícia Gonçalves pela orientação, disponibilidade e interesse demonstrado, crucial na elaboração deste trabalho, bem como no incentivo na escrita em LATEX;

à minha família pelo apoio incondicional durante todo o meu percurso académico;

aos meus colegas e amigos pela paciência e confiança depositada nas minhas capacidades de trabalho;

ao Raul Almeida pela amizade e carinho em todas as horas de trabalho partilhadas na mesma mesa.

Resumo

A modelação estocástica nas ciências atuariais permite criar modelos para os Ramos Vida e Não-Vida da atividade de uma seguradora, através dos quais se podem analisar diversos parâmetros, e desta forma auxiliar na tomada de decisões e evitar desvios financeiros.

Neste trabalho pretende-se analisar o ramo não-vida das ciências atuariais, mais concretamente a área designada por teoria da ruína, que consiste no estudo não só dos prémios, como também das indemnizações de seguradoras, de forma a controlar desvios financeiros e evitar a ruína. Assim, recorreu-se ao modelo clássico, conhecido por modelo de Crámer-Lundberg, e efetuaram-se duas abordagens distintas considerando o tempo discreto e o tempo contínuo. Além da obtenção de alguns resultados úteis nesta análise, realizaram-se simulações teóricas e também a análise de uma base de dados real de uma seguradora ainda em funcionamento.

Concluiu-se que apesar das limitações impostas aos modelos, no tempo discreto e no tempo contínuo, se obtiveram resultados indicativos e que permitem comparar estimativas de probabilidades de ruína, mediante um determinado capital inicial, ou taxa constante a que são pagos os prémios à seguradora, ou mesmo da distribuição assumida para as indemnizações.

Palavras-chave: Teoria do Risco; Teoria da Ruína; Modelo de Crámer-Lundberg; Probabilidade de ruína

Abstract

The stochastic modeling in actuarial sciences allows to create models for the branch of Life and Non-Life in insurance companies, from which one can analyze several parameters, and to help on taking decisions and to avoid financial deviations.

In this work, one intends to analyze the non-life insurance branch in actuarial sciences, more precisely the area denominated by ruin theory, which consists not only in the study of the premiums, but also on the study of insurance claims, in such a way of helping to control financial deviations and to avoid the ruin. Therefore, one considers the classic model for the insurance capital, known as the Crámer-Lundberg model, and two different approaches were done, one considering discrete time and the other considering continuous time. Moreover, besides obtaining several useful results from this analysis, one realized theoretical simulations and also the analysis of real data from an insurance company still working on the market.

One concluded that, besides the imposed limitations to the models, in discrete and continuous time, one obtained indicative results that allow one to compare estimates for the ruin probability, depending on a certain initial capital, or the constant rate at which the premiums are payed to the insurance company, or on the distributions of the claims.

Palavras-chave: Risk theory; Ruin theory; Crámer-Lundberg model; Ruin probability

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Ferramentas	3
2.1	Variável aleatória e sua função de distribuição	3
2.2	Tipos de variáveis aleatórias	6
2.3	Esperança matemática e independência estocástica	9
2.4	Função geradora de momentos	13
2.5	Função característica	14
2.6	Soma de variáveis aleatórias	16
2.7	Processo estocástico	17
2.7.1	Processo de Poisson	19
2.7.2	Processo Estocástico composto	19
2.8	Esperança condicional	21
2.9	Martingais	23
2.9.1	Martingais a tempo discreto	23
2.9.2	Martingais a tempo contínuo	30
3	Teoria da ruína	31
3.1	O modelo em tempo discreto	32
3.1.1	Aplicação dos martingais à teoria da ruína	38
3.2	Modelo de Crámer-Lundberg em tempo contínuo	42
3.2.1	Aplicação dos martingais à teoria da ruína	54
4	Simulações teóricas	61
4.1	Indemnização particular discreta	62
4.2	Indemnização particular absolutamente contínua	65
4.3	Apresentação dos dados	70
5	Análise de uma base de dados	73
5.1	Descrição dos dados	73
5.2	Probabilidade de ruína	78

5.3 Estimativa do capital	81
6 Notas finais	83

Lista de Figuras

3.1	Possível trajetória do capital de reserva.	32
3.2	Existência do coeficiente de ajustamento - Modelo em tempo discreto.	35
3.3	Possível trajetória do processo de Poisson $N(t)$	43
3.4	Existência do coeficiente de ajustamento - Modelo em tempo contínuo.	45
3.5	Possível trajetória do capital de reserva - indemnizações limitadas superiormente.	48
4.1	Coeficiente de ajustamento para $X \sim P(750)$	62
4.2	Coeficiente de ajustamento para $X \sim Geo\left(\frac{1}{750}\right)$	63
4.3	Coeficiente de ajustamento para $X \sim Bin(3000, 0.25)$	64
4.4	Coeficiente de ajustamento para $X \sim Exp\left(\frac{1}{750}\right)$	66
4.5	Coeficiente de ajustamento para $X \sim \mathcal{U}[0, 1500]$	67
4.6	Coeficiente de ajustamento para $X \sim \mathcal{U}[300, 1200]$	68
4.7	Coeficiente de ajustamento para $X \sim \mathcal{N}(750, 50)$	69
4.8	Coeficiente de ajustamento para $X \sim Gamma(1500, 2)$	70
4.9	Comparação do majorante da probabilidade de ruína entre algumas distribuições discretas.	71
4.10	Comparação do majorante da probabilidade de ruína entre algumas distribuições contínuas.	72
5.1	Comparação entre os valores dos prémios e das indemnizações.	75
5.2	Evolução do número de indemnizações.	75
5.3	Comparação entre o valor dos prémios e das indemnizações relativos à carteira de seguros automóvel.	77
5.4	Evolução do número de indemnizações relativas à carteira de seguros automóvel.	78
5.5	Coeficiente de ajustamento relativo à base de dados reais.	80

Lista de Tabelas

2.1	Função de probabilidade - variáveis aleatórias discretas.	7
2.2	Função densidade de probabilidade - variáveis aleatórias contínuas.	8
2.3	Esperança matemática - variáveis aleatórias discretas.	11
2.4	Esperança matemática - variáveis aleatórias contínuas.	12
2.5	Função geradora de momentos - variáveis aleatórias discretas.	14
2.6	Função geradora de momentos - variáveis aleatórias contínuas.	14
2.7	Função característica - variáveis aleatórias discretas.	15
2.8	Função característica - variáveis aleatórias contínuas.	16
4.1	Majorante para a probabilidade de ruína para $X \sim P(750)$	62
4.2	Majorante para a probabilidade de ruína para $X \sim Geo\left(\frac{1}{750}\right)$	64
4.3	Majorante para a probabilidade de ruína para $X \sim Bin(3000, 0.25)$	65
4.4	Majorante para a probabilidade de ruína, valor exato e erro relativo para $X \sim Exp\left(\frac{1}{750}\right)$	66
4.5	Majorante para a probabilidade de ruína para $X \sim \mathcal{U}[0, 1500]$	67
4.6	Majorante para a probabilidade de ruína para $X \sim \mathcal{U}[300, 1200]$	68
4.7	Majorante para a probabilidade de ruína para $X \sim \mathcal{N}(750, 50)$	69
4.8	Majorante para a probabilidade de ruína para $X \sim Gamma(1500, 2)$	70
5.1	Valor (em k euros) das indemnizações da seguradora em estudo.	73
5.2	Valor (em k euros) dos prémios da seguradora em estudo.	74
5.3	Número de indemnizações da seguradora em estudo.	74
5.4	Valor (em k euros) das indemnizações relativas à carteira de seguros automóvel.	76
5.5	Valor (em k euros) dos prémios relativos à carteira de seguros automóvel.	76
5.6	Número de indemnizações relativas à carteira de seguros automóvel.	77
5.7	Classes das indemnizações relativas à carteira de seguros automóvel.	79
5.8	Majorante para a probabilidade de ruína para diferentes valores de capital inicial u	81

Capítulo 1

Introdução

O Atuariado teve diversos significados com o decorrer da história (consulte [6]), mas foi no século XVIII no Reino Unido que ocorreu o mais próximo do considerado atualmente: um atuário assistente com conhecimentos em matemática, medicina e interesse em ciência experimental que lhe permitiu ser o responsável pelo cálculo dos prémios. Hoje em dia, além da atividade seguradora, verifica-se a aplicação dos métodos usados na mesma em áreas como Finanças, no cálculo do risco nos mercados financeiros.

Por ser a Matemática a matéria fundamental das Ciências Atuariais, além da Estatística e da Economia, o Atuariado é muitas vezes designado por Matemática Actuarial. Em Portugal, para se ser atuário deve-se ser membro da organização profissional com legislação específica denominada Instituto dos Atuários Portugueses.

A atividade seguradora das companhias tem regras muito próprias e é fiscalizada pelo Instituto de Seguros de Portugal, de forma a garantir o bom funcionamento e a aplicação das regras do mercado.

A matemática actuarial pode ser dividida em dois ramos, cada um deles ligado a uma área de aplicação específica, ou seja, Cálculo Actuarial ligado ao Ramo Vida e Teoria do Risco ligado ao Ramo Não-Vida. E deve abordar-se cada um deles de forma distinta. Uma das diferenças fundamentais destes dois tipos de seguro prende-se com o facto de no seguro de vida a indemnização só ocorrer uma vez, o que não é o caso dos seguros não-vida. O objetivo deste trabalho foca-se na Teoria do Risco.

O presente trabalho apresenta uma abordagem à Teoria da Ruína nos modelos em tempo contínuo e em tempo discreto, com exemplos práticos, assim como simulações teóricas e análise de uma base de dados. Este encontra-se dividido em cinco capítulos.

O Capítulo 2 apresenta todos os conceitos básicos fundamentais para a compreensão dos capítulos seguintes, desde variável aleatória, esperança matemática, função geradora de momentos, função característica, até processo estocástico ou martingais.

O Capítulo 3 tem por objetivo o estudo da Teoria da Ruína, sendo este o capítulo fundamental deste trabalho. Na Secção 3.1 encontra-se a descrição do modelo em tempo discreto e na Secção 3.2 a análise do modelo em tempo contínuo.

O Capítulo 4 apresenta algumas simulações teóricas resultado da aplicação dos resultados do Capítulo 3, considerando o modelo em tempo contínuo. Assumem-se diferentes distribuições para as indemnizações particulares, e efetua-se o cálculo das probabilidades de ruína.

O Capítulo 5 tem por objetivo a análise de dados reais de uma seguradora, em atividade atualmente. Realiza-se uma análise descritiva dos valores das indemnizações, prémios e número de indemnizações, assim como o cálculo das probabilidades de ruína e também a previsão do capital da seguradora.

O Capítulo 6 apresenta algumas notas finais relativas ao trabalho que foi desenvolvido.

Capítulo 2

Ferramentas

Neste capítulo vão ser introduzidas definições e conceitos necessários para a compreensão dos capítulos posteriores.

2.1 Variável aleatória e sua função de distribuição

Para compreender do conceito de variável aleatória, são necessárias definições como espaço amostral, σ -álgebra e medida de probabilidade.

Seja Ω um espaço abstrato que será o espaço amostral cujos elementos se vão denotar por ω .

Definição 2.1.1. (σ -álgebra)

Uma colecção não vazia \mathcal{F} de elementos de Ω diz-se uma σ -álgebra se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F}$, então $A^c \in \mathcal{F}$;
3. $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}$, então $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{F}$.

Exemplo 2.1.2. É fácil de verificar que no espaço amostral $\Omega = \{a, b\}$, o conjunto definido por $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ é uma σ -álgebra. Este é o chamado conjunto das partes de Ω .

Exemplo 2.1.3. A σ -álgebra formada pela colecção de intervalos em \mathbb{R} da forma $(a, b]$, onde $a < b$ e $a, b \in \mathbb{R}$, diz-se a σ -álgebra de Borel em \mathbb{R} . Esta σ -álgebra será denotada ao longo do texto por \mathcal{B} .

Definição 2.1.4. (Medida de Probabilidade)

Uma medida de probabilidade $P(\cdot)$ definida em \mathcal{F} é uma função $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1. $\forall A \in \mathcal{F}, P(A) \geq 0$;
2. Se $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma colecção de subconjuntos de \mathcal{F} , disjuntos 2 a 2, isto é, $(\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset)$, então

$$P\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} P(A_j);$$

3. $P(\Omega) = 1$.

Como consequência da definição anterior, obtêm-se as seguintes propriedades:

Propriedades de uma medida de probabilidade

MP1 $\forall A \in \mathcal{F}, P(A) \leq 1$;

MP2 $P(\emptyset) = 0$;

MP3 $\forall A \in \mathcal{F}, P(A^c) = 1 - P(A)$;

MP4 $\forall A, B \in \mathcal{F}, P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$;

MP5 Se $\forall A, B \in \mathcal{F}, A \subset B$ então $P(A) = P(B) - P(B|A) \leq P(B)$, onde $B|A := B \cap A^c$;

MP6 Se $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}, A_j \uparrow A$, isto é, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$, então

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} P(A_j) = P(A);$$

MP7 (Desigualdade de Boole)

$$\forall A_j \in \mathcal{F}, P\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j\right) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} P(A_j).$$

Definição 2.1.5. (Variável aleatória)

Uma variável aleatória é uma função $X : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (A \subseteq \mathbb{R}, \mathcal{B})$ que satisfaz a seguinte propriedade:

$$\forall B \in \mathcal{B}, X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Ou seja, diz-se que X é mensurável com respeito a \mathcal{F} e usa-se a notação $X \in \mathcal{F}$ para denotar esta propriedade.

Lema 2.1.6. *Toda a medida de probabilidade $\mu(\cdot)$ definida em \mathcal{B} determina uma função de distribuição $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ através da correspondência*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mu((-\infty, x]) = F(x).$$

Para a demonstração veja o lema da página 25 de [3].

Definição 2.1.7. (Função de distribuição)

$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de distribuição se:

1. $F(\cdot)$ é crescente e contínua à direita;
2. $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$;
3. $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

Teorema 2.1.8. *Cada função de distribuição $F(\cdot)$ determina uma medida de probabilidade $\mu_X(\cdot)$ definida em \mathcal{B} através da relação $F(b) - F(a) = \mu((a, b])$, $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$.*

Para a demonstração deste teorema, veja o Teorema 2.2.2 de [3].

Teorema 2.1.9. *Dada uma medida de probabilidade $\mu(\cdot)$ definida em \mathcal{B} , existe uma só função de distribuição $F(\cdot)$ que satisfaz $\mu((-\infty, x]) = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, dada uma função de distribuição $F(\cdot)$, existe uma só medida de probabilidade $\mu(\cdot)$ que satisfaz $\mu((-\infty, x]) = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Pode consultar a prova no Teorema 2.2.4 de [3].

Teorema 2.1.10. *Cada variável aleatória X é definida num espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) e induz um outro espaço de probabilidade $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_X)$, através da seguinte correspondência:*

$$\forall B \in \mathcal{B}, \mu_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P \circ X^{-1}(B) = P(\omega \in \Omega : X(\omega) \in B) = P(X \in B).$$

Para a demonstração veja o Teorema 3.1.3 de [3].

Definição 2.1.11. (Medida induzida)

A medida obtida no teorema anterior corresponde à medida induzida pela variável aleatória X no espaço $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Usa-se a notação $\mu_X(\cdot) = P(X \in \cdot)$.

Apresentam-se de seguida dois exemplos de notação usada neste contexto:

- Chama-se medida de distribuição de probabilidade ou medida de distribuição de X à medida definida por $\mu_X(\cdot) = P \circ X^{-1}(\cdot)$.

- A função de distribuição de X é denotada por $F_X(\cdot)$ e é definida por

$$F_X(x) = \mu_X((-\infty, x]) = P(X \leq x) = P(X^{-1}((-\infty, x])), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Definição 2.1.12. (Variáveis aleatórias identicamente distribuídas)

Variáveis aleatórias com a mesma medida de distribuição $\mu(\cdot)$ ou com a mesma função de distribuição $F(\cdot)$ dizem-se identicamente distribuídas.

Introduz-se agora uma função que será utilizada no decorrer do trabalho.

Definição 2.1.13. (Função indicadora)

A função indicadora de um conjunto A , que se denota por $I_A(\cdot)$, é a função que toma o valor 1 em A e toma o valor 0 fora de A , isto é,

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}.$$

Nota 2.1.14. Facilmente se verifica que se $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ são conjuntos disjuntos, tem-se para todo $x \in \mathbb{R}$ que

$$I_{\{\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j(x)\}} = \sum_{j \in \mathbb{N}} I_{A_j}(x).$$

2.2 Tipos de variáveis aleatórias

Uma variável aleatória pode decompor-se num dos tipos: discreta, absolutamente contínua ou singular, mediante as suas características.

Definição 2.2.1. (Variável aleatória discreta)

Uma variável aleatória $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_X)$ diz-se discreta, se toma um número finito ou numerável de valores, ou seja, existe um conjunto $I = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que: $X(\omega) \in I, \forall \omega \in \Omega$.

A função $p : I \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$p(x_i) = P(X = x_i),$$

para $i \geq 1$, diz-se a função de probabilidade de X .

A função de distribuição de X define-se para $x \in \mathbb{R}$ como

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^j p(x_i),$$

onde j é tal que $x_j \leq x < x_{j+1}$.

Abaixo apresentam-se alguns exemplos clássicos de variáveis aleatórias discretas.

Exemplo 2.2.2. *Bernoulli, Binomial, Poisson e Geométrica são exemplos de distribuições discretas.*

Distribuição	Função de probabilidade
Bernoulli(p)	$p(x) = p^x(1-p)^{1-x}, x \in \{0, 1\}, 0 < p < 1$
Binomial(n, p)	$p(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x(1-p)^{n-x}, x \in \{1, 2, \dots, n\}, 0 < p < 1, n \in \mathbb{N}$
Poisson(θ)	$p(x) = e^{-\theta} \frac{\theta^x}{x!}, x \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \theta > 0$
Geométrica(p)	$p(x) = p(1-p)^x, x \in \mathbb{N} \cup \{0\}, 0 < p < 1$

Tabela 2.1: Função de probabilidade - variáveis aleatórias discretas.

Observação: De forma a simplificar a notação, vai-se optar por denotar que uma variável aleatória X segue uma das distribuições discretas referidas no exemplo acima da seguinte forma: $X \sim Ber(p)$ para Bernoulli de parâmetro p , $X \sim Bin(n, p)$ para Binomial de parâmetros n e p , $X \sim P(\theta)$ para Poisson de parâmetro θ e $X \sim Geo(p)$ para Geométrica de parâmetro p .

Definição 2.2.3. (Variável aleatória absolutamente contínua)

Uma variável aleatória $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_X)$ diz-se absolutamente contínua se existe uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ (isto é, $f(\cdot)$ é uma função positiva);
- $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$, onde $F_X(\cdot)$ é a função de distribuição de X .

Neste caso, diz-se que $f(\cdot)$ é a função densidade de probabilidade de X (que se representa por $f_X(\cdot)$) e $F_X(\cdot)$ diz-se uma função de distribuição absolutamente contínua.

No caso acima, facilmente se verifica que a função de distribuição $F_X(\cdot)$ satisfaz as propriedades descritas na Definição 2.1.7.

Abaixo apresentam-se alguns exemplos de variáveis aleatórias absolutamente contínuas.

Exemplo 2.2.4. As distribuições Uniforme, Exponencial, Gamma e Normal são exemplos de distribuições absolutamente contínuas:

Distribuição	Função densidade de probabilidade
Uniforme $[a, b]$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x), a, b \in \mathbb{R}, a < b$
Exponencial (β)	$f_X(x) = \beta e^{-\beta x} \mathbf{1}_{[0,+\infty]}(x), \beta > 0$
Gamma (α, β)	$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x > 0, \alpha, \beta > 0$
Normal (μ, σ)	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, x, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$

Tabela 2.2: Função densidade de probabilidade - variáveis aleatórias contínuas.

Acima $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx$ designa-se por função gamma.

Observação: À semelhança do caso discreto, vai-se optar por denotar que uma variável aleatória X segue uma das distribuições absolutamente contínuas referidas no exemplo acima, da seguinte forma: $X \sim \mathcal{U}[a, b]$ para Uniforme em $[a, b]$, $X \sim \text{Exp}(\beta)$ para Exponencial de parâmetro β , $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ para Gamma de parâmetros α e β e por último $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ para Normal de parâmetros μ e σ .

Definição 2.2.5. (Variável aleatória singular)

Uma variável aleatória $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_X)$ diz-se singular se:

- existe um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}$ de comprimento¹ zero tal que $P(X \in C) = 1$;
- se a sua função de distribuição $F_X(\cdot)$ é contínua, isto é, $P(X = x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.2.6. A distribuição ternária de Cantor é um exemplo de distribuição singular. O leitor pode ver mais sobre esta distribuição no capítulo 2 de [4].

Nos exemplos a seguir, vão usar-se apenas variáveis aleatórias discretas ou absolutamente contínuas.

¹Define-se comprimento do intervalo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ por $b - a$.

2.3 Esperança matemática e independência estocástica

Definição 2.3.1. (Esperança matemática)

Seja X uma variável aleatória discreta que toma valores num conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$, onde $I = \{x_1, x_2, \dots\}$, com função de probabilidade $p(\cdot)$. A esperança matemática de X é definida por

$$E[X] = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i P(X = x_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i p(x_i). \quad (2.3.1)$$

Se X é uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade $f_X(\cdot)$, define-se a esperança de X por

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx.$$

A esperança de X é também designada de média de X ou valor esperado de X .

No caso geral, remete-se o leitor para [3], por exemplo.

Existem várias representações para a esperança de X , sendo as mais comuns as que se seguem:

$$E[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} x \mu_X(dx).$$

Lema 2.3.2. *Seja X uma variável aleatória definida em (Ω, \mathcal{F}, P) . Então*

$$E[X] = \int_0^{+\infty} P(X > x) dx - \int_{-\infty}^0 P(X \leq x) dx.$$

Se além disso, X toma somente valores não negativos, isto é, $X(\omega) \geq 0$ para todo $\omega \in \Omega$, então $P(X \leq x) = 0$ para todo $x \leq 0$, donde resulta que

$$E[X] = \int_0^{+\infty} P(X > x) dx. \quad (2.3.2)$$

O leitor pode encontrar a prova deste resultado na Proposição 3.1 de [4].

Teorema 2.3.3. *Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.*

Se X é uma variável aleatória discreta com função de probabilidade $p(\cdot)$, que toma valores num conjunto $I = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$, então

$$E[g(X)] = \sum_{i \in \mathbb{N}} g(x_i) p(x_i).$$

Se X é uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade de probabilidade $f_X(\cdot)$, então

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx.$$

Para a prova do resultado anterior num caso ainda mais geral, o leitor deve consultar a Proposição 3.1 de [4].

Definição 2.3.4. (Acontecimento quase certo)

Diz-se que um evento $A \subseteq \Omega$ acontece quase certamente se $P(A) = 1$.

Definição 2.3.5. (Variável aleatória integrável)

Diz-se que X é uma variável aleatória integrável se

$$E[X] = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}} X dF_X(x) \neq \pm\infty.$$

As propriedades da esperança matemática são de seguida enunciadas.

Propriedades da Esperança matemática

E1 Absoluta integrabilidade

$$E[X] = \int_{\Omega} X(\omega) dP \neq \pm\infty \text{ se e só se } E[|X|] < +\infty;$$

E2 Linearidade

Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ tem-se que

$$E[aX + bY] = \int_{\Omega} (aX(\omega) + bY(\omega)) dP = a \int_{\Omega} X(\omega) dP + b \int_{\Omega} Y(\omega) dP = aE[X] + bE[Y];$$

E3 Se $\{A_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ são conjuntos disjuntos tais que $A_j \subseteq \Omega \forall j \in \mathbb{N}$, então

$$E\left[\mathbf{1}_{\{\cup_{j \in \mathbb{N}} A_j\}}\right] = \sum_{j \in \mathbb{N}} E[\mathbf{1}_{A_j}], \text{ onde a igualdade é conseguida pela Nota 2.1.14 e pela propriedade E2;}$$

E4 Se $X \geq 0$ quase certamente (isto é, $P(X \geq 0) = 1$) então $\int_A X(\omega) dP \geq 0$ para todo $A \subseteq \Omega$;

E5 Monotonia

Se $X_1(\omega) \leq X(\omega) \leq X_2(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$, então $E[X_1] \leq E[X] \leq E[X_2]$, ou seja,

$$\int_{\Omega} X_1(\omega) dP \leq \int_{\Omega} X(\omega) dP \leq \int_{\Omega} X_2(\omega) dP;$$

E6 Teorema do valor médio

Se $a \leq X(\omega) \leq b$ para todo $\omega \in \Omega$, então $\int_A a dP \leq \int_A X(\omega) dP \leq \int_A b dP$, ou seja $aP(A) \leq \int_A X(\omega) dP \leq bP(A)$.

Note que $\int_A dP = \int \mathbf{1}_A dP = P(A)$;

E7 Desigualdade do módulo

Se $A \subseteq \Omega$, então $|\int_A X(\omega) dP| \leq \int_A |X(\omega)| dP$, ou seja, $|E[X\mathbf{1}_A]| \leq E[|X|\mathbf{1}_A]$;

E8 Teorema da convergência dominada

Se

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ quase certamente,
- $\forall n \in \mathbb{N}, |X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$ quase certamente, e $E[Y] \neq \pm\infty$, isto é, Y é integrável,

então

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A X_n dP = \int_A \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n dP = \int_A X dP.$$

Na tabela a seguir são apresentadas as expressões do valor esperado das distribuições discretas referidas no Exemplo 2.2.2.

Distribuição	Esperança Matemática
$Ber(p)$	$E[X] = p$
$Bin(n, p)$	$E[X] = np$
$P(\theta)$	$E[X] = \theta$
$Geo(p)$	$E[X] = \frac{(1-p)}{p}$

Tabela 2.3: Esperança matemática - variáveis aleatórias discretas.

As expressões do valor esperado das distribuições absolutamente contínuas referidas no Exemplo 2.2.4 são descritas na tabela seguinte.

Distribuição	Esperança Matemática
$\mathcal{U}[a, b]$	$E[X] = \frac{a+b}{2}$
$Exp(\beta)$	$E[X] = \frac{1}{\beta}$
$Gamma(\alpha, \beta)$	$E[X] = \frac{\alpha}{\beta}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$E[X] = \mu$

Tabela 2.4: Esperança matemática - variáveis aleatórias contínuas.

Definição 2.3.6. (Momentos)

Seja X uma variável aleatória, $b \in \mathbb{R}$ e $R > 0$. Se o valor $E[(X - b)^R]$ existe, então é chamado de momento de X de ordem R em relação a b . Quando $b = E[X]$ diz-se momento centrado.

No caso em que X é uma variável discreta com função de probabilidade $p(\cdot)$, que toma valores num conjunto $I = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$, o momento de X de ordem R em relação a b é igual a

$$E[(X - b)^R] = \sum_{i \in \mathbb{N}} (x_i - b)^R p(x_i).$$

Se X é uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade de probabilidade $f_X(\cdot)$, o momento de X de ordem R em relação a b é igual a

$$E[(X - b)^R] = \int_{\mathbb{R}} (x - b)^R f_X(x) dx.$$

Assim sendo, o momento de ordem $R = 1$ em relação a $b = 0$ é a esperança matemática de X definida por $E[X]$, o momento centrado ($b = E[X]$) de ordem $R = 2$ é chamado variância, e representa-se por $Var(X)$. Sendo assim enunciam-se as seguintes definições e o teorema:

Definição 2.3.7. (Variância)

A variância de uma variável aleatória X é definida por

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Definição 2.3.8. (Independência)

As variáveis aleatórias X_1 e X_2 são variáveis independentes se e só se

$$P(X_1 \in A, X_2 \in B) = P(\{X_1 \in A\} \cap \{X_2 \in B\}) = P(X_1 \in A)P(X_2 \in B), \forall A, B \in \mathcal{B}.$$

Teorema 2.3.9. Se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes definidas num espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) então

$$E[X_1 X_2] = E[X_1]E[X_2].$$

Mais geralmente, se $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, então

$$E[f(X_1)g(X_2)] = E[f(X_1)]E[g(X_2)].$$

Para a prova do resultado anterior veja a prova do Teorema 3.3.3 de [3].

2.4 Função geradora de momentos

Definição 2.4.1. (Função geradora de momentos)

Seja $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_X)$ uma variável aleatória com função de distribuição $F_X(\cdot)$ e medida de distribuição $\mu_X(\cdot)$. A função geradora de momentos de X , denotada por $M_X(\cdot)$, define-se para $t \in \mathbb{R}$ por

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{\Omega} e^{tX(\omega)} dP = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \mu_X(dx).$$

No caso em que X é uma variável discreta com função de probabilidade $p(\cdot)$, que toma valores num conjunto $I = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$, a função geradora de momentos de X é igual a

$$M_X(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{tx_i} p(x_i).$$

Se X é uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade de probabilidade $f_X(\cdot)$, a função geradora de momentos de X é igual a

$$M_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x) dx.$$

A expressão da função geradora de momentos das distribuições discretas apresentadas no Exemplo 2.2.2, encontram-se na tabela seguinte.

Distribuição	Função geradora de momentos
$Ber(p)$	$M_X(t) = (1 - p) + pe^t$
$Bin(n, p)$	$M_X(t) = [pe^t + 1 - p]^n$
$P(\theta)$	$M_X(t) = e^{\theta(e^t - 1)}$
$Geo(p)$	$M_X(t) = \frac{p}{1 - (1 - p)e^t}, t < -\log(1 - p)$

Tabela 2.5: Função geradora de momentos - variáveis aleatórias discretas.

As expressões da função geradora de momentos das distribuições absolutamente contínuas referidas no Exemplo 2.2.4 são descritas na tabela seguinte.

Distribuição	Função geradora de momentos
$\mathcal{U}(a, b)$	$M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b - a)t}$
$Exp(\beta)$	$M_X(t) = \frac{\beta}{\beta - t}$
$Gamma(\alpha, \beta)$	$M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha, t < \beta$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

Tabela 2.6: Função geradora de momentos - variáveis aleatórias contínuas.

2.5 Função característica

Definição 2.5.1. (Função característica)

Seja $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu_X)$ uma variável aleatória com função de distribuição $F_X(\cdot)$ e medida de distribuição $\mu_X(\cdot)$. A função característica de X , denotada por $\varphi_X(\cdot)$, define-se para $t \in \mathbb{R}$ por

$$\varphi_X(t) = E[e^{itX}] = \int_{\Omega} e^{itX(\omega)} dP = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dF_X(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mu_X(dx), \quad (2.5.1)$$

onde $e^{itX} = \cos(tX) + i\sin(tX)$. Esta fórmula é conhecida como Fórmula de Euler.

No caso em que X é uma variável discreta com função de probabilidade $p(\cdot)$, que toma valores num conjunto $I = \{x_1, x_2, \dots\} \subseteq \mathbb{R}$, a função característica de X é igual a

$$\varphi_X(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}} e^{itx_i} p(x_i).$$

Se X é uma variável aleatória absolutamente contínua com função densidade de probabilidade $f_X(\cdot)$, a função característica de X é igual a

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_X(x) dx.$$

É possível indicar as principais propriedades da função característica.

Propriedades da função característica

FC1 $\varphi_X(t) = \overline{\varphi_X(t)}$, onde para $u = x + iy \in \mathbb{C}$, denotamos por \bar{u} o conjugado de u , isto é, $\bar{u} = x - iy$;

FC2 Para $a, b \in \mathbb{R}$, se $Y = aX + b$, então $\varphi_Y(t) = e^{itb} \varphi_X(at)$;

FC3 Se X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes, então

$$\varphi_{X_1+X_2}(t) = \varphi_{X_1}(t) \varphi_{X_2}(t), \forall t \in \mathbb{R}.$$

As expressões seguintes referem-se à função característica das variáveis aleatórias discretas apresentadas no Exemplo 2.2.2.

Distribuição	Função Característica
$Ber(p)$	$\varphi_X(t) = 1 - p + p e^{it}$
$Bin(n, p)$	$\varphi_X(t) = [1 - p + p e^{it}]^n$
$P(\theta)$	$\varphi_X(t) = e^{\theta(e^{it} - 1)}$
$Geo(p)$	$\varphi_X(t) = p e^{it} (1 - p)(1 - e^{it}(1 - p))^{-1}$

Tabela 2.7: Função característica - variáveis aleatórias discretas.

As expressões da função característica das variáveis aleatórias absolutamente contínuas referidas no Exemplo 2.2.4 são descritas na tabela seguinte.

Distribuição	Função Característica
$\mathcal{U}(a, b)$	$\varphi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
$Exp(\beta)$	$\varphi_X(t) = (1 - it\beta^{-1})^{-1}$
$Gamma(\alpha, \beta)$	$\varphi_X(t) = (1 - it\beta)^{-\alpha}$
$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	$\varphi_X(t) = e^{it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

Tabela 2.8: Função característica - variáveis aleatórias contínuas.

2.6 Soma de variáveis aleatórias

Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes. A distribuição da soma das variáveis, isto é, a distribuição de $X_1 + X_2$, pode ser obtida recorrendo à convolução ou à função característica.

Definição 2.6.1. (Convolução)

A convolução de duas funções de distribuição $F_1(\cdot)$ e $F_2(\cdot)$ é definida pela função de distribuição $F(\cdot)$ dada por:

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} F_1(x-y) dF_2(y)$$

e é denotada por $F = F_1 * F_2$, da mesma forma, a convolução de duas funções densidade de probabilidade $f_{X_1}(\cdot)$ e $f_{X_2}(\cdot)$ é definida pela função densidade probabilidade $f(\cdot)$, dada por

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(x-y) f_{X_2}(y) dy,$$

e é denotada por $f = f_{X_1} * f_{X_2}$.

Teorema 2.6.2. Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes com função de distribuição $F_1(\cdot)$ e $F_2(\cdot)$, respectivamente. Então, a variável aleatória $X_1 + X_2$ tem função de distribuição $F_1 * F_2(\cdot)$.

Para a demonstração deste resultado, veja o Teorema 6.1.1 de [3].

Teorema 2.6.3. A convolução de duas funções de distribuição absolutamente contínuas, com densidades $f_{X_1}(\cdot)$ e $f_{X_2}(\cdot)$, é absolutamente contínua com densidade $f_{X_1} * f_{X_2}(\cdot)$.

Para a demonstração deste resultado, veja o Teorema 6.1.2 de [3].

Lema 2.6.4. *Se X_1, X_2, \dots, X_n são variáveis aleatórias independentes e se para $n \geq 1$ define-se $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, então:*

1. $\varphi_{S_n}(t) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t)$;
2. e se além disso X_1, X_2, \dots, X_n são identicamente distribuídas, então

$$\varphi_{S_n}(t) = (\varphi_{X_1}(t))^n.$$

Demonstração. É possível verificar o ponto 1 uma vez que,

$$\varphi_{S_n}(t) = E[e^{itS_n}] = E[e^{it\sum_{i=1}^n X_i}] = E\left[\prod_{i=1}^n e^{itX_i}\right] = \prod_{i=1}^n E[e^{itX_i}] = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(t).$$

Na quarta igualdade recorre-se ao Teorema 2.3.9.

O ponto 2 resulta do ponto 1 e do facto de

$$\varphi_{X_i}(t) = \varphi_{X_1}(t), \forall i = 1, \dots, n,$$

uma vez que as variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n são identicamente distribuídas. \square

2.7 Processo estocástico

A lei de probabilidade que rege uma determinada experiência aleatória pode mudar com o decorrer do tempo. Fará sentido considerar, desta forma, uma variável aleatória $Y(t)$ que associará probabilidades (possivelmente) diferentes, em instantes distintos, ao mesmo acontecimento. Esta sucessão de variáveis aleatórias é designada de processo estocástico.

Definição 2.7.1. (Processo estocástico)

Um processo estocástico consiste numa família de variáveis aleatórias $Y(t)$, onde t é um parâmetro que toma valores sobre um conjunto T , designado por conjunto de índices do processo.

Existem diversas formas de representação de um processo estocástico, por exemplo, $\{Y(t); t \in T\}$, ou $\{Y_t; t \in T\}$, ou $\{Y_t\}_{t \in T}$, ou ainda $\{Y(t)\}_{t \in T}$. Vai optar-se por esta última notação.

Definição 2.7.2. (Realização do processo estocástico)

Uma realização de um processo estocástico $\{Y(t)\}_{t \in T}$ é uma afetação, para cada $t \in T$, de um valor possível para $Y(t)$.

Se $T = \{0, 1, 2, \dots\}$, então $\{Y(t)\}_{t \in T}$ designa-se por processo estocástico a tempo discreto.

Se $T = [0, +\infty)$ o processo $\{Y(t)\}_{t \in T}$ designa-se por processo estocástico a tempo contínuo.

Definição 2.7.3. (Incrementos independentes)

Diz-se que um processo estocástico a tempo contínuo $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$, tem incrementos independentes quando, qualquer que seja a escolha dos índices $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, as n variáveis aleatórias

$$Y(t_1) - Y(t_0), Y(t_2) - Y(t_1), \dots, Y(t_n) - Y(t_{n-1})$$

são independentes.

Definição 2.7.4. (Incrementos estacionários)

Um processo estocástico a tempo contínuo $\{Y(t)\}_{t \geq 0}$ tem incrementos estacionários se a variável aleatória $Y(t_2 + h) - Y(t_1 + h)$ tem a mesma distribuição do que a variável aleatória $Y(t_2) - Y(t_1)$, qualquer que seja $t_1, t_2 \geq 0$, com $t_2 > t_1$ para todo o $h > 0$. Ou seja, a distribuição de $Y(t_2) - Y(t_1)$ não depende da sua localização, mas apenas da amplitude do intervalo $(t_2 - t_1)$.

O espaço de estados de um processo estocástico é o espaço no qual os possíveis valores de cada $Y(t)$ residem. Quando o espaço de estados é numerável, o processo é designado por processo com espaço de estados discreto.

Quando o espaço de estados coincide com $\{0, 1, 2, \dots\}$, o processo estocástico designa-se por processo de contagem.

Se o espaço de estados coincide com o conjunto dos números reais ou com o conjunto dos números reais não negativos o processo estocástico designa-se por processo de valores reais.

De forma a facilitar a leitura de algumas das próximas expressões, substituiu-se a letra Y pela letra N sempre que se esteja perante um processo de contagem.

2.7.1 Processo de Poisson

Definição 2.7.5. (Processo de Poisson não homogéneo)

Um processo de Poisson não homogéneo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ de parâmetro $\lambda(t)$ é um processo de contagem que verifica os seguintes postulados:

1. $N(0) = 0$;
2. $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ tem incrementos independentes;
3. Para qualquer $h \rightarrow 0^+$, $P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h)^2$ com $\lambda(t) \geq 0$;
4. Para qualquer $h \rightarrow 0^+$, $P(N(t+h) - N(t) \geq 2) = o(h)$.

Definição 2.7.6. (Processo de Poisson homogéneo)

Um processo de Poisson homogéneo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$, ou apenas processo de Poisson, é um processo de contagem que verifica os seguintes postulados:

1. $N(0) = 0$;
2. $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ tem incrementos independentes e estacionários;
3. Para qualquer $h \rightarrow 0^+$, $P(N(h) \geq 1) = \lambda h + o(h)$;
4. Para qualquer $h \rightarrow 0^+$, $P(N(h) \geq 2) = o(h)$.

Se se considerar os incrementos de um processo de Poisson não homogéneo como sendo estacionários e $\lambda(t) = \lambda \forall t$, obtém-se um processo de Poisson homogéneo. Deste modo, o terceiro e quarto postulados da Definição 2.7.5 são exactamente equivalentes ao terceiro e quarto postulados da definição anterior.

Um conceito que será necessário mais à frente é o de processo estocástico composto, que será denotado por $S(t)$.

2.7.2 Processo Estocástico composto

Definição 2.7.7. (Processo Estocástico composto)

$\{S(t)\}_{t \geq 0}$ diz-se um processo estocástico composto se

$$S(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} X_i$$

²Note-se que uma função $f(\cdot)$ diz-se infinitésimo de h e representa-se por $o(h)$ quando $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

onde $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de contagem, $\{X_i\}_{i \geq 1}$ uma família de variáveis aleatórias independentes entre si e identicamente distribuídas a uma variável aleatória X e além disso são independentes de $\{N(t)\}_{t \geq 0}$. Toma-se $X_0 = 0$.

Definição 2.7.8. (Processo de Poisson composto)

Se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo estocástico composto e $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson homogéneo, diz-se que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson composto.

Lema 2.7.9. (Equação de Wald)

Se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo estocástico composto, então $E[S(t)] = E[N(t)]E[X]$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} E[S(t)] &= E\left[\sum_{i=0}^{N(t)} X_i\right] = E\left[\mathbf{1}_{\{\cup_{m=0}^{+\infty} \{N(t)=m\}\}} \sum_{i=0}^{N(t)} X_i\right] \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} E\left[\mathbf{1}_{\{N(t)=m\}} \sum_{i=0}^m X_i\right] = \sum_{m=0}^{+\infty} E\left[\mathbf{1}_{\{N(t)=m\}}\right] \sum_{i=0}^m E[X_i] \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(N(t) = m) m E[X] = E[N(t)]E[X]. \end{aligned}$$

Na terceira igualdade recorre-se à propriedade **E3** da Secção 2.3, a quarta igualdade é possível devido à independência entre o processo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ e a família de variáveis aleatórias $\{X_i\}_{i \geq 1}$ e $X_0 = 0$, a quinta igualdade consegue-se pelo facto das variáveis aleatórias $\{X_i\}_{i \geq 1}$ serem identicamente distribuídas e a última resulta da definição de esperança de uma variável aleatória discreta que toma valores em $I = \{0, 1, 2, \dots\}$, ver a Definição 2.3.1. \square

Corolário 2.7.10. Se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson composto, então $E[S(t)] = \lambda t \mu$.

Demonstração. Este resultado justifica-se pelo Teorema 2.1 de [2], que refere que sendo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ um processo de Poisson homogéneo, resulta que $N(t)$ é uma variável aleatória com distribuição de Poisson de média λt , ou seja, $E[N(t)] = \lambda t$. Pelo resultado anterior obtém-se que $E[S(t)] = \lambda t \mu$. \square

Lema 2.7.11. (Função geradora de momentos de $S(t)$)

Se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo estocástico composto, então para $r \in \mathbb{R}$

$$M_{S(t)}(r) = M_{N(t)}(\log(M_X(r))),$$

onde $M_{S(t)}(\cdot)$, $M_{N(t)}(\cdot)$ e $M_X(\cdot)$ representam a função geradora de momentos de $S(t)$, $N(t)$ e X , respetivamente.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
M_{S(t)}(r) &= E[e^{rS(t)}] = E\left[e^{r\sum_{i=0}^{N(t)} X_i}\right] = E\left[\mathbf{1}_{\{\cup_{m=0}^{+\infty} \{N(t)=m\}\}} e^{r\sum_{i=0}^{N(t)} X_i}\right] \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} E\left[\mathbf{1}_{\{N(t)=m\}} e^{r\sum_{i=0}^{N(t)} X_i}\right] = \sum_{m=0}^{+\infty} P(N(t)=m) E\left[e^{r\sum_{i=0}^m X_i}\right] \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} P(N(t)=m) E\left[\prod_{i=0}^m e^{rX_i}\right] = \sum_{m=0}^{+\infty} P(N(t)=m) \prod_{i=1}^m E[e^{rX_i}] \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} P(N(t)=m) (M_X(r))^m = \sum_{m=0}^{+\infty} P(N(t)=m) e^{m \log(M_X(r))} \\
&= M_{N(t)}(\log(M_X(r))).
\end{aligned}$$

A quarta igualdade resulta da propriedade **E3** da Secção 2.3, a quinta igualdade resulta da independência das variáveis e do Teorema 2.3.9, a sétima consegue-se através da independência das variáveis $\{X_i\}_{i \geq 1}$ e do Teorema 2.3.9, a oitava resulta das variáveis $\{X_i\}_{i \geq 1}$ serem identicamente distribuídas e a última igualdade resulta da Definição 2.4.1. \square

Corolário 2.7.12. *Se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson composto, a função geradora de momentos de $S(t)$ é dada em $r \in \mathbb{R}$ por*

$$M_{S(t)}(r) = e^{\lambda t (M_X(r) - 1)}.$$

Demonstração. Basta na prova do Lema 2.7.11, tomar $N(t)$ como variável aleatória com distribuição de Poisson de média λt (veja o Teorema 2.1 de [2]) donde resulta que

$$M_{S(t)}(r) = M_{N(t)}(\log(M_X(r))) = e^{\lambda t (e^{\log(M_X(r))} - 1)} = e^{\lambda t (M_X(r) - 1)}.$$

A segunda igualdade é obtida através da Tabela 2.5. \square

2.8 Esperança condicional

Considera-se o espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{G}, P) , onde Ω é um espaço amostral, \mathcal{G} é uma σ -álgebra e $P(\cdot)$ uma medida de probabilidade.

Definição 2.8.1. (*σ -álgebra gerada pela variável aleatória X*)

A σ -álgebra gerada pela variável aleatória X é definida por:

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}.$$

Definição 2.8.2. (Esperança Condicional)

Dada uma variável aleatória integrável X e uma σ -álgebra \mathcal{G} , $E[X|\mathcal{G}]$ a esperança condicional de X em relação a \mathcal{G} , é uma variável aleatória definida em Ω que satisfaz as seguintes condições:

- $E[X|\mathcal{G}] \in \mathcal{G}$;
- Esta variável tem o mesmo valor do integral de X sobre qualquer conjunto de \mathcal{G} ,

$$A \in \mathcal{G} \text{ então } \int_A X(\omega) dP = \int_A E[X|\mathcal{G}](\omega) dP$$

Enunciam-se a seguir algumas das propriedades da esperança condicional.

Propriedades da Esperança condicional

EC1 Se $X \in \mathcal{G}$, então $E[X|\mathcal{G}] = X$, quase certamente;

EC2 Linearidade

$$E[X + Y|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{G}] + E[Y|\mathcal{G}];$$

EC3 Monotonia

$$\text{se } X_1(\omega) \leq X_2(\omega), \forall \omega \in \Omega, \text{ então } E[X_1|\mathcal{G}] \leq E[X_2|\mathcal{G}];$$

EC4 Absoluta integrabilidade

$$|E[X|\mathcal{G}]| \leq E[|X||\mathcal{G}];$$

EC5 Se $X_n \uparrow X$ ³, isto é, para todo $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega) \leq X_{n+2}(\omega) \leq \dots$ e além disso $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, então $E[X_n|\mathcal{G}] \uparrow E[X|\mathcal{G}]$;

EC6 Se $X_n \downarrow X$, isto é, para todo $\omega \in \Omega$, $X_n(\omega) \geq X_{n+1}(\omega) \geq X_{n+2}(\omega) \geq \dots$ e além disso $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, então $E[X_n|\mathcal{G}] \downarrow E[X|\mathcal{G}]$;

EC7 Se:

- para todo $\omega \in \Omega$ $|X_n(\omega)| \leq Y(\omega)$ com $E[Y] \neq \pm\infty$,
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$,

$$\text{então } \lim_{n \rightarrow +\infty} E[X_n|\mathcal{G}](\omega) \rightarrow E[X|\mathcal{G}](\omega);$$

EC8 Se X e Y são variáveis aleatórias independentes então $E[X|Y] = E[X]$. Note que $E[X|Y]$ representa $E[X|\sigma(Y)]$, onde $\sigma(Y)$ é a σ -álgebra gerada por Y .

³Veja o significado de \uparrow em MP6 na Definição 2.1.4.

No teorema seguinte estão enunciadas as propriedades mais importantes sobre esperanças condicionais.

Teorema 2.8.3. *Se X é uma variável aleatória integrável e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, então*

1. $E[X|\mathcal{F}] = E[X|\mathcal{G}]$ se e só se $E[X|\mathcal{G}] \in \mathcal{F}$;
2. $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{F}] = E[X|\mathcal{F}] = E[E[X|\mathcal{F}]|\mathcal{G}]$.

Para a demonstração deste resultado veja o Teorema 9.1.5 de [3].

Nota 2.8.4. *Dada \mathcal{F} a σ -álgebra trivial, isto é, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ e X uma variável aleatória, tem-se que $E[X|\mathcal{F}] = E[X]$.*

Tendo em conta o resultado anterior e o Teorema 2.8.3, verifica-se que para uma σ -álgebra \mathcal{G}

$$E[X] = E[E[X|\mathcal{G}]].$$

2.9 Martingais

É possível definir um martingal de duas formas distintas: em relação a um processo estocástico ou em relação a um filtro. Primeiramente, será dada a caracterização de martingal em relação a um processo estocástico.

Nesta secção assume-se $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2.9.1 Martingais a tempo discreto

Definição 2.9.1. (Martingal)

Considerem-se dois processos estocásticos $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ e $\{Y(n)\}_{n \geq 0}$. A sequência $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ é um martingal em relação a $\{Y(n)\}_{n \geq 0}$ se para todo $n \geq 0$ se tem que:

1. $Z(n)$ é integrável, isto é, $E[|Z(n)|] < +\infty$;
2. $E[Z(n+1)|Y(0), Y(1), \dots, Y(n)] = Z(n)$;
3. $Z(n)$ é uma função de $(Y(0), Y(1), \dots, Y(n))$.

É útil interpretar $Y(n)$ como o estado de um sistema no momento n . Assim, se se representar a σ -álgebra gerada por $Y(0), Y(1), \dots, Y(n)$ por \mathcal{F}_n , então \mathcal{F}_n representa a informação ou história disponível até ao momento n .

Exemplo 2.9.2. *Sejam $\{Y(n)\}_{n \geq 0}$ variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com $E[Y(n)] = 0$ e $\text{Var}[Y(n)] = \sigma^2$, $\forall n \geq 0$. É possível provar que os dois processos*

a) $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$, com $Z(n) = \sum_{j=0}^n Y(j)$,

b) $\{W(n)\}_{n \geq 0}$, com $W(n) = \left(\sum_{j=0}^n Y(j)\right)^2 - n\sigma^2$,

são martingais em relação a $\{Y(n)\}_{n \geq 0}$.

Desta forma, relembre-se a Secção 2.8 acerca das esperanças condicionais.

No caso a), é possível provar que a condição 1 da Definição 2.9.1 é equivalente a provar que $E[Z(n)] < +\infty$, através da propriedade **E1** da Secção 2.3. Ora,

$$E[Z(n)] = E\left[\sum_{j=0}^n Y(j)\right] = \sum_{j=0}^n E[Y(n)] = 0.$$

Para provar a condição 2, basta ver que se $\mathcal{F}_n = \sigma(Y(0), Y(1), \dots, Y(n))$, então

$$\begin{aligned} E[Z(n+1)|\mathcal{F}_n] &= E\left[\sum_{j=0}^{n+1} Y(j) \middle| \mathcal{F}_n\right] = E[Z(n) + Y(n+1)|\mathcal{F}_n] \\ &= E[Z(n)|\mathcal{F}_n] + E[Y(n+1)|\mathcal{F}_n] = Z(n) + E[Y(n+1)|\mathcal{F}_n] \\ &= Z(n) + E[Y(n+1)] = Z(n). \end{aligned}$$

A primeira igualdade advém da definição de $Z(n+1)$, a terceira consegue-se através da propriedade **EC2**, a quarta pela propriedade **EC1** e a quinta pela propriedade **EC8**.

Mostrar a condição 3, isto é, mostrar que $Z(n)$ é função de $(Y(0), Y(1), \dots, Y(n))$, é possível uma vez que se $Z(n) = \sum_{j=0}^n Y(j)$, então $Z(n) = s(Y(0), Y(1), \dots, Y(n))$, onde $s(\cdot)$ é a função definida por

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (y_0, y_1, \dots, y_n) &\rightarrow y_0 + y_1 + \dots + y_n. \end{aligned}$$

Daqui resulta que $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ é um martingal em relação a $\{Y(n)\}_{n \geq 0}$.

Também é possível provar que $\{W(n)\}_{n \geq 0}$ é um martingal, isto é, o caso b) do exemplo

acima. Para provar a condição 1 da Definição 2.9.1, note-se que

$$\begin{aligned}
 E[W(n)] &= E\left[\left(\sum_{j=0}^n Y(j)\right)^2 - n\sigma^2\right] = E\left[\left(\sum_{j=0}^n Y(j)\right)^2\right] - n\sigma^2 = E\left[\sum_{j=0}^n Y(j) \sum_{i=0}^n Y(i)\right] - n\sigma^2 \\
 &= E\left[\sum_{j=0}^n Y(j)^2 + \sum_{j \neq i=0}^n Y(j)Y(i)\right] - n\sigma^2 = E\left[\sum_{j=0}^n Y(j)^2\right] + E\left[\sum_{j \neq i=0}^n Y(j)Y(i)\right] - n\sigma^2 \\
 &= \sum_{j=0}^n E[Y(j)^2] - n\sigma^2 = n\sigma^2 - n\sigma^2 = 0 < +\infty.
 \end{aligned}$$

A sexta e sétima igualdade resultam do facto da esperança de $Y(n)$ ser nula para todo $n \geq 0$ e das variáveis aleatórias $\{Y(n)\}_{n \geq 0}$ serem independentes.

Para se verificar a condição 2, veja-se que:

$$\begin{aligned}
 E[W(n+1)|\mathcal{F}_n] &= E\left[\left(\sum_{j=0}^{n+1} Y(j)\right)^2 - (n+1)\sigma^2 \middle| \mathcal{F}_n\right] \\
 &= E\left[\left(\sum_{j=0}^n Y(j) + Y(n+1)\right)^2 - (n+1)\sigma^2 \middle| \mathcal{F}_n\right] \\
 &= E\left[\left(\sum_{j=0}^n Y(j)\right)^2 - n\sigma^2 + Y(n+1)^2 + 2Y(n+1) \sum_{j=0}^n Y(j) - \sigma^2 \middle| \mathcal{F}_n\right] \\
 &= W(n) + E\left[Y(n+1)^2 + 2Y(n+1) \sum_{j=0}^n Y(j) - \sigma^2 \middle| \mathcal{F}_n\right] \\
 &= W(n) + E\left[Y(n+1)^2 \middle| \mathcal{F}_n\right] + 2E\left[Y(n+1) \sum_{j=0}^n Y(j) \middle| \mathcal{F}_n\right] - \sigma^2 \\
 &= W(n) + E[Y(n+1)^2] + 2E[Y(n+1)(Y(1) + \dots + Y(n))] - \sigma^2 \\
 &= W(n) + \sigma^2 + 2E[Y(n+1)]E[Y(1) + \dots + Y(n)] - \sigma^2 \\
 &= W(n) + \sigma^2 - \sigma^2 = W(n).
 \end{aligned}$$

A quarta igualdade consegue-se através da propriedade **EC1** e a quinta através da propriedade **EC8**.

A prova da condição 3 verifica-se trivialmente, pois $W(n) = \tilde{s}(Y(0), Y(1), \dots, Y(n))$, onde a função $\tilde{s}(\cdot)$ é definida por

$$\begin{aligned}
 \tilde{s} : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (y_0, y_1, \dots, y_n) &\rightarrow (y_0 + y_1 + \dots + y_n)^2 - n\sigma^2.
 \end{aligned}$$

Lema 2.9.3. Se $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ é um martingal em relação a $\{Y(n)\}_{n \geq 0}$, tem-se que para

$k \geq 1$ e $n \geq 0$:

$$E[Z(n+k)|\mathcal{F}_n] = Z(n), \quad (2.9.1)$$

onde $\mathcal{F}_n = \sigma(Y(0), Y(1), \dots, Y(n))$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} E[Z(n+k)|\mathcal{F}_n] &= E \left[E[Z(n+k)|\mathcal{F}_{n+k-1}] \middle| \mathcal{F}_n \right] = E[Z(n+k-1)|\mathcal{F}_n] \\ &= E \left[E[Z(n+k-1)|\mathcal{F}_{n+k-2}] \middle| \mathcal{F}_n \right] = E[Z(n+k-2)|\mathcal{F}_n] = \dots \\ &= E[Z(n+1)|\mathcal{F}_n] = Z(n). \end{aligned}$$

Nas igualdades acima usam-se a Nota 2.8.4, o Teorema 2.8.3 e o facto de $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ ser um martingal em relação a $\{Y(n)\}_{n \geq 0}$. \square

Corolário 2.9.4. Se $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ é um martingal em relação a $\{Y(n)\}_{n \geq 0}$, então,

$$E[Z(k)] = E[Z(0)], \forall k \geq 1, \quad (2.9.2)$$

ou seja, um martingal tem esperança constante.

Demonstração. Esta igualdade obtém-se fazendo $n = 0$ na equação (2.9.1). Ao calcular o valor esperado em ambos os membros da equação (2.9.1), tem-se que

$$E[Z(0)] = E[E[Z(k)|\mathcal{F}_0]] = E[Z(k)], \forall k \geq 1.$$

\square

Definição 2.9.5. (Incrementos do martingal)

Seja $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ um martingal em relação a $\{Y(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $X(n) = Z(n) - Z(n-1)$ e $X(0) = 0$ para $n \geq 1$. $X(n)$ é chamado de incremento do martingal $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$.

Corolário 2.9.6. Seja $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ um martingal em relação a $\{Y(n)\}_{n \geq 0}$. Seja $X(0) = 0$ e $X(n) = Z(n) - Z(n-1)$. Então $E[X(n)] = 0$, para todo $n \geq 0$.

Tal é consequência imediata da expressão (2.9.2).

Definição 2.9.7. Sejam X e Y variáveis aleatórias. Define-se a covariância entre X e Y por

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Assumindo que os segundos momentos do martingal existem, tem-se que:

Lema 2.9.8. *Os incrementos de um martingal são não correlacionados, isto é, a covariância entre incrementos é nula.*

Demonstração. Seja $X(n) = Z(n) - Z(n-1)$ onde $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ é um martingal, então pelo Corolário 2.9.6 tem-se que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X(n), X(n+k)) &= E[X(n)X(n+k)] \\ &= E[X(n)(Z(n+k) - Z(n+k-1))] \\ &= E[X(n)E[(Z(n+k) - Z(n+k-1)) | \mathcal{F}_n]] \\ &= E[X(n)(E[Z(n+k) | \mathcal{F}_n] - E[Z(n+k-1) | \mathcal{F}_n])] \\ &= E[X(n)(Z(n) - Z(n))] = 0. \end{aligned}$$

Utilizam-se algumas propriedades da esperança condicional referidas na Secção 2.8 para obter as igualdades anteriores. \square

Lema 2.9.9. *Dadas $X(1), \dots, X(n)$ variáveis aleatórias não correlacionadas, então*

$$\text{Var}\left(\sum_{j=0}^n X(j)\right) = \sum_{j=0}^n \text{Var}(X(j)), \forall n.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \text{Var}\left[\sum_{j=0}^n X(j)\right] &= E\left[\left(\sum_{j=0}^n X(j) - E\left[\sum_{j=0}^n X(j)\right]\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\sum_{j=0}^n X(j) - \sum_{j=0}^n E[X(j)]\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\sum_{j=0}^n (X(j) - E[X(j)])\right)^2\right] \\ &= E\left[\sum_{j,i=0}^n (X(j) - E[X(j)])(X(i) - E[X(i)])\right] \\ &= E\left[\sum_{j=0}^n (X(j) - E[X(j)])^2\right] \\ &\quad + 2 \sum_{\substack{i,j=0 \\ j < i}}^n E\left[(X(i) - E[X(i)])(X(j) - E[X(j)])\right] \\ &= \sum_{j=0}^n E[X(j) - E[X(j)]]^2 = \sum_{j=0}^n \text{Var}(X(j)). \end{aligned}$$

A segunda igualdade consegue-se pela propriedade **E2** da Secção 2.3 e a sétima igualdade resulta da expressão de variância, veja-se a Definição 2.3.7. \square

Definição 2.9.10. (Submartingal)

A sequência $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ é um submartingal em relação a $\{Y(n)\}_{n \geq 0}$ se para todo $n \geq 0$, se tem que:

- a) $E[Z(n)^+] < +\infty$, onde para cada $n \geq 0$ se tem que $Z(n)^+ = \max\{0, Z(n)\}$,
- b) $E[Z(n+1)|Y(0), Y(1), \dots, Y(n)] \geq Z(n)$,
- c) $Z(n)$ é uma função de $(Y(0), Y(1), \dots, Y(n))$.

Observação: A sequência $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ é um supermartingal se na condição a) acima, se tomar $E[Z(n)^-] > -\infty$ onde para cada $n \geq 0$ se tem que $Z(n)^- = \min\{0, Z(n)\}$, e na condição b) se tomar $E[Z(n+1)|Y(0), Y(1), \dots, Y(n)] \leq Z(n)$.

Definição 2.9.11. (Tempo de Markov)

Uma variável aleatória T diz-se um tempo de Markov ou "stopping-time" ou ainda "optional stopping" em relação a $\{Y(n)\}_{n \geq 0}$ se T toma valores em $\{0, 1, \dots, +\infty\}$ e o acontecimento $\{T = n\}$ é determinado por $\mathcal{F}_n = \sigma(Y(0), Y(1), \dots, Y(n))$.

Seja

$$\tilde{Z}(n) = \begin{cases} Z(n) & \text{se } n < T \\ Z(T) & \text{se } n \geq T \end{cases} \quad (2.9.3)$$

Um dos teoremas mais importantes da teoria dos martingais refere que um martingal $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ tal que a sequência $\{E[Z(n)]\}_{n \geq 0}$ seja limitada (ou um supermartingal não negativo) converge quase certamente.

Definição 2.9.12. (Convergência quase certa)

Uma sequência de variáveis aleatórias $\{X(n)\}_{n \geq 0}$ definida num espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) converge quase certamente para uma variável aleatória X se e só se $P\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} X(n, \omega) = X(\omega)\right) = 1$, vale quase certamente.

Abaixo, serão enunciados teoremas utilizados na próxima secção, que mostram a potencialidade dos martingais na teoria de ruína. Não serão apresentadas demonstrações. Caso o leitor pretenda aprofundar alguns conceitos pode consultar [4].

Teorema 2.9.13. (Desigualdade de Kolmogorov para submartingais não negativos)

Seja $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ um submartingal não negativo. Então para qualquer m positivo,

$$P\left(\max_{0 \leq k \leq n} Z(k) > m\right) \leq \frac{E[Z(n)]}{m}. \quad (2.9.4)$$

Corolário 2.9.14. *Seja $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ um martingal. Então para todo m positivo,*

$$P\left(\max_{0 \leq k \leq n} |Z(k)| > m\right) \leq \frac{E[|Z(n)|]}{m}. \quad (2.9.5)$$

Demonstração. O resultado obtém-se do Teorema 2.9.13 e do facto de a função $\phi(x) = |x|$ transformar um martingal num submartingal não negativo. \square

Corolário 2.9.15. *Seja $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ um martingal não negativo. Então para todo m positivo,*

$$P\left(\max_{n \geq 0} Z(n) > m\right) \leq \frac{E[Z(0)]}{m}. \quad (2.9.6)$$

Demonstração. Tendo em conta que se $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ é um martingal não negativo então $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ também é um submartingal e $E[Z(n)] = E[Z(0)]$, o que leva a que o lado direito da desigualdade definida no Teorema 2.9.13 não dependa de n , obtendo-se assim o resultado anterior. \square

De seguida enuncia-se o resultado anterior, não apenas quando se está perante um martingal não negativo, bastando estar-se perante um supermartingal não negativo.

Teorema 2.9.16. (Desigualdade de Kolmogorov para supermartingais não negativos)

Seja $\{Z(n)\}_{n \geq 0}$ um supermartingal não negativo. Então para qualquer m positivo,

$$P\left(\max_{n \geq 0} Z(n) > m\right) \leq \frac{E[Z(0)]}{m}. \quad (2.9.7)$$

É possível definir a teoria de martingais com respeito a um filtro. Desta forma serão dadas novas definições. Serão usadas esperanças condicionais, pelo que se pode consultar a Secção 2.8.

Definição 2.9.17. (Filtro a tempo discreto)

Um filtro é uma sequência $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ de σ -álgebras tal que

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \dots \quad \forall n \geq 0.$$

Vai-se então generalizar a Definição 2.9.1 de martingal introduzida atrás.

Definição 2.9.18. (Martingais a tempo discreto)

Uma sequência de variáveis aleatórias $\{X(n)\}_{n \geq 0}$ e uma sequência de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ formam o martingal $\{X(n), \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ se para todo $n \geq 0$ se tem que:

1. \mathcal{F}_n é um filtro e $X(n) \in \mathcal{F}_n$;

2. $E[|X(n)|] < +\infty$;
3. $E[X(n+1)|\mathcal{F}_n] = X(n)$.

Observação: $\{X(n), \mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$ trata-se de um supermartingal se na condição 3 acima, se tomar $E[X(n+1)|\mathcal{F}_n] \leq X(n)$, e submartingal se $E[X(n+1)|\mathcal{F}_n] \geq X(n)$, $\forall n \geq 0$.

Definição 2.9.19. (Filtro a tempo contínuo)

Um filtro é uma sequência $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ de σ -álgebras tal que $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$, $\forall 0 \leq s \leq t$.

2.9.2 Martingais a tempo contínuo

Vai-se generalizar a noção de martingal para tempo contínuo.

Definição 2.9.20. (Martingais a tempo contínuo)

Uma sequência de variáveis aleatórias $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ e uma sequência de σ -álgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ formam o martingal $\{X(t), \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ se $\forall t \geq 0$ se tem que:

1. \mathcal{F}_t é um filtro e $X(t) \in \mathcal{F}_t$;
2. $E[|X(t)|] < +\infty$;
3. $E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s)$, $\forall 0 \leq s \leq t$.

Observação: $\{X(t), \mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ trata-se de um supermartingal se na condição 3 acima, se tomar $E[X(t)|\mathcal{F}_s] \leq X(s)$, e submartingal se $E[X(t)|\mathcal{F}_s] \geq X(s)$, $\forall 0 \leq s \leq t$.

Capítulo 3

Teoria da ruína

A Teoria do Risco tem por base uma carteira de seguros de uma seguradora, ou seja um conjunto de apólices. Vai-se utilizar um modelo que assenta sobre as seguintes premissas: pode ocorrer um número aleatório de indemnizações em cada período e estas indemnizações podem tomar um montante aleatório.

No modelo que se pretende usar vai assumir-se que a indemnização é paga no instante em que ocorre o sinistro, apesar de efetivamente os instantes ocorrência do sinistro e pagamento de indemnização, não coincidirem por diversas razões. Portanto, neste modelo, o número de indemnizações que ocorrem até um determinado tempo coincide com o número de indemnizações. São ainda ignorados fatores como o rendimento proveniente de investimentos, dividendos e outros fatores que não sejam as indemnizações e a parte dos prémios que resulta da dedução de despesas de carácter administrativo e de gestão.

É necessário o conhecimento da distribuição não só do número de indemnizações como das indemnizações particulares para a aplicação do modelo. Em muitos casos é usada a distribuição de Poisson para o número de indemnizações, uma vez que é muito prático do ponto de vista matemático. As distribuições Exponencial, Gamma, Uniforme, Normal, Pareto, Lognormal são algumas das distribuições a considerar para descrever as indemnizações particulares.

A Teoria da Ruína consiste em analisar as circunstâncias (número de indemnizações até à ocorrência de ruína ou probabilidade desta ocorrer) em que ocorre a ruína de uma seguradora. Entende-se que a ruína da seguradora ocorre quando o capital da seguradora é negativo ou inferior a um determinado valor considerado a barreira de ruína, num certo ponto ou pontos do tempo.

Neste capítulo, sempre que se refere à probabilidade de ruína obtida através da desigualdade de Lundberg, enunciada no Lema 3.2.9, está-se a referir a um majorante para esta probabilidade.

A Figura 3.1 descreve uma possível trajetória do capital de uma seguradora. O capital da seguradora no tempo t está representado por $U(t)$, o capital inicial $U(0)$ está representado por u e supõe-se que as indemnizações ocorrem nos tempos T_1, T_2, \dots . Até à ocorrência de um sinistro, ou seja, de uma indemnização, o gráfico de $U(t)$ é linear pois no modelo que se vai considerar, assume-se que a seguradora recebe os prémios a uma taxa constante $c > 0$. Sendo assim, o gráfico é linear com declive dado por c . Além disso, como por exemplo, no tempo T_1 ocorre um sinistro e se procede à respetiva indemnização do valor X_1 , então tem-se que $U(T_1) = U(T_1^-) - X_1$. Ou seja, em cada instante T_i o gráfico de $U(t)$ decresce um valor X_i com respeito ao valor do gráfico no tempo imediatamente antes de T_i .

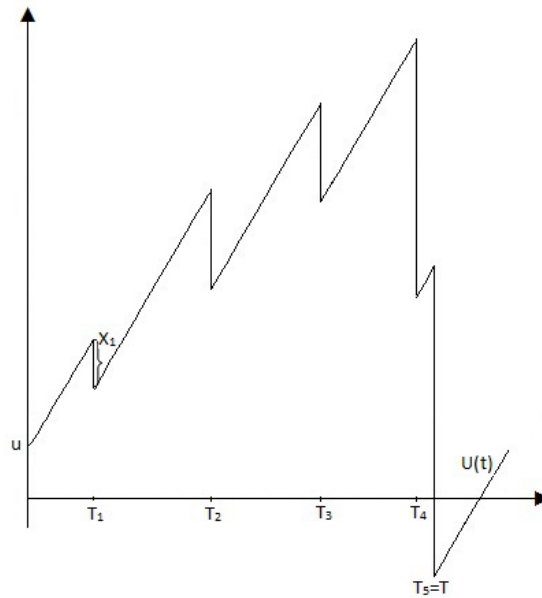


Figura 3.1: Possível trajetória do capital de reserva.

É possível efectuar a análise do nível do capital de risco assumindo que o tempo é contínuo ou discreto, e o horizonte temporal é finito ou infinito.

3.1 O modelo em tempo discreto

Nesta secção estuda-se um modelo considerando o tempo discreto.

Seja $U := \{U(n)\}_{n \geq 0}$, onde para $n \geq 0$, $U(n)$ representa o capital de uma seguradora

no fim do período n . Para cada $n > 0$, define-se

$$U(n) = u + cn - \sum_{k=1}^n S_k \quad (3.1.1)$$

onde $u = U(0) \geq 0$ é o capital inicial, c é o prémio recebido em cada período de tempo, $S_0 = 0$ e para cada $k \geq 1$, S_k representa a indemnização agregada relativa ao período k .

Assume-se que as variáveis aleatórias $\{S_k\}_{k \geq 1}$ são independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória S definida num espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) .

Sendo natural de esperar no tempo n um capital superior ao que foi inicialmente investido, ou seja $E[U(n)] > E[U(0)]$, resulta que

$$c > E[S]. \quad (3.1.2)$$

Ou seja, $E[U(n)] > E[U(0)] \Leftrightarrow E\left[cn - \sum_{k=1}^n S_k\right] > 0 \Leftrightarrow c > E[S]$.

Define-se o tempo de ruína como o primeiro momento em que o capital da seguradora é negativo, ou seja $U(n) < 0$ e $U(j) \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, n-1$.

Definição 3.1.1. (Tempo de ruína)

O tempo de ruína T é o primeiro momento em que a ruína ocorre, ou seja,

$$T = \min\{n \geq 1 : U(n) < 0\}.$$

Considerando o capital inicial u , é possível definir a probabilidade de ocorrer a ruína assumindo horizonte temporal finito, ou mais especificamente:

Definição 3.1.2. (Probabilidade de ruína)

A probabilidade de ocorrer a ruína para o capital inicial u é definida por

$$\psi(u) = P(T < +\infty | U(0) = u). \quad (3.1.3)$$

Por outro lado também se pode definir a probabilidade de sobrevivência, ou seja, o complementar da probabilidade de ruína, que remete para a probabilidade de não ocorrer ruína para o capital inicial u , assumindo horizonte temporal finito.

Definição 3.1.3. (Probabilidade de sobrevivência)

A probabilidade de sobrevivência para o capital inicial u é definida por

$$\delta(u) = 1 - \psi(u).$$

Além das probabilidades de ruína e de sobrevivência, uma quantidade importante, que se relaciona com as probabilidades referidas, é o chamado coeficiente de ajustamento. Para se definir este conceito, assume-se a existência da função geradora de momentos de S (que se representa por $M_S(r)$) para $-\infty < r < \eta$ e que satisfaz $\lim_{r \rightarrow \eta} M_S(r) = +\infty$.

Definição 3.1.4. (Coeficiente de ajustamento)

O coeficiente de ajustamento \tilde{R} é definido como a única raiz positiva da equação

$$E\left[e^{r(S-c)}\right] = 1, \quad (3.1.4)$$

onde $r < \eta$.

Nota 3.1.5. *É possível provar que a equação (3.1.4) possui apenas uma raiz positiva. Para tal, observe que $E\left[e^{r(S-c)}\right] = E\left[e^{rS}e^{-rc}\right]$. Donde resulta que a equação (3.1.4) é equivalente a*

$$M_S(r) = e^{rc}. \quad (3.1.5)$$

O gráfico da Figura 3.2 foi conseguido considerando uma determinada distribuição para as indemnizações agregadas $\{S_k\}_{k \geq 1}$, isto é, para S , de forma a ser possível verificar facilmente a intersecção entre as duas funções referidas na nota anterior. Optou-se por considerar que S tem distribuição Exponencial, de forma que na Figura 3.2 apresentam-se os gráficos de duas funções $\frac{\beta}{\beta-r}$ e e^{rc} , onde se assumiu $c = 500$ e $\beta = \frac{1}{300}$. Da equação (3.1.4) resulta o ponto \tilde{R} exibido na Figura 3.2.

Recorreu-se ao software Maple e com os comandos a seguir explicitados obteve-se o gráfico explicativo.

$$\left| \begin{array}{l} > \text{beta} := 1/300; \\ > e(r) := \text{beta}/(\text{beta} - r); \\ > d(r) := \exp(r * (500)); \\ > \text{plot}([e(r), d(r)], r = 0..0.0028, \text{color} = [\text{black}, \text{red}]); \end{array} \right|$$

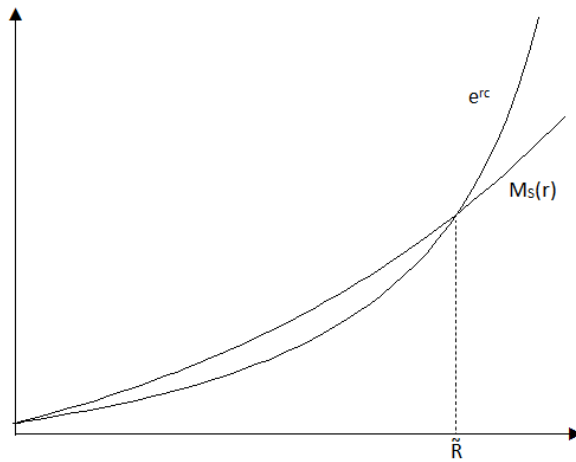


Figura 3.2: Existência do coeficiente de ajustamento - Modelo em tempo discreto.

De seguida apresentam-se alguns exemplos considerando que as indemnizações agregadas relativas ao período k seguem distribuições discretas e o cálculo do respetivo coeficiente de ajustamento.

Exemplo 3.1.6. (*S com distribuição $P(\theta)$*). Assumindo que as indemnizações agregadas são independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória S com distribuição de Poisson com parâmetro $\theta > 0$, tem-se pela Tabela 2.5 que $M_S(r) = e^{\theta(e^r - 1)}$. Assim, a equação (3.1.4) escreve-se como $e^{\theta(e^r - 1)} = e^{rc}$. Desta forma, o coeficiente de ajustamento será a solução positiva de $\theta(e^r - 1) = rc$, ou seja

$$\theta e^r - rc = \theta.$$

Exemplo 3.1.7. (*S com distribuição $\text{Geo}(p)$*). Assumindo que as indemnizações agregadas são independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória S com distribuição Geométrica com parâmetro $p \in (0, 1)$, tem-se pela Tabela 2.5 que $M_S(r) = \frac{p}{1 - (1-p)e^r}$. Assim, a equação (3.1.4) escreve-se como

$$\frac{p}{1 - (1-p)e^r} = e^{rc}.$$

Desta forma, o coeficiente de ajustamento será a solução positiva de

$$(p+1)(e^{rc})^2 + e^{rc} - p = 0.$$

Exemplo 3.1.8. (*S com distribuição $\text{Bin}(n, p)$*). Assumindo que as indemnizações agregadas são independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória S com distribuição Binomial com parâmetros $n \in \mathbb{N}$ e $p \in (0, 1)$, tem-se pela Tabela 2.5 que $M_S(r) = [pe^r + 1 - p]^n$. Assim, o coeficiente de ajustamento é a solução positiva de

$$\boxed{[pe^r + 1 - p]^n = e^{rc}}.$$

De seguida apresentam-se alguns exemplos de distribuições absolutamente contínuas para as indemnizações agregadas relativas ao período k e o cálculo do respetivo coeficiente de ajustamento.

Exemplo 3.1.9. (*S com distribuição $\mathcal{U}([a, b])$*). Assumindo que as indemnizações agregadas são independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória S com distribuição Uniforme em $[a, b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $b > a$, tem-se pela Tabela 2.6 que $M_S(r) = \frac{e^{br} - e^{ar}}{(b-a)r}$. Assim, o coeficiente de ajustamento é a solução positiva de

$$\boxed{\frac{e^{br} - e^{ar}}{(b-a)r} = e^{rc}}.$$

Exemplo 3.1.10. (*S com distribuição $\mathcal{U}([0, b])$*). Assumindo que as indemnizações agregadas são independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória S com distribuição Uniforme, mas onde o limite inferior é nulo, tem-se pela Tabela 2.6 que o coeficiente de ajustamento é a solução positiva de

$$\boxed{e^{br} - bre^{rc} = 1}.$$

Exemplo 3.1.11. (*S com distribuição $\text{Exp}(\beta)$*). Assumindo que as indemnizações agregadas são independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória S com distribuição Exponencial de parâmetro $\beta > 0$, tem pela Tabela 2.6 que $M_S(r) = \frac{\beta}{\beta - r}$. O coeficiente de ajustamento calcula-se através da seguinte expressão $\frac{\beta}{\beta - r} = e^{rc}$, ou seja é a solução positiva de

$$\boxed{(\beta - r)e^{rc} = \beta}.$$

Exemplo 3.1.12. (*S com distribuição $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$*). Assumindo que as indemnizações agregadas são independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória S com distribuição normal de média μ e desvio padrão σ , tem-se pela Tabela 2.6 que $M_S(r) = e^{\mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2}$. Uma vez que

$$E[e^{r(S-c)}] = E[e^{rS - rc}] = E[e^{rS}] (e^{-rc}) = e^{\mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2} e^{-rc} = e^{\mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2 - rc},$$

ou seja,

$$E[e^{r(S-c)}] = 1 \Leftrightarrow e^{\mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2 - rc} = 1 \Leftrightarrow \mu r + \frac{1}{2}\sigma^2 r^2 = rc,$$

então para encontrar \tilde{R} , basta observar que

$$r \left((\mu - c) + \frac{1}{2}\sigma^2 r \right) = 0 \Leftrightarrow r = 0 \vee r = \frac{c - \mu}{\frac{1}{2}\sigma^2} \Leftrightarrow r = 0 \vee r = \frac{2(c - \mu)}{\sigma^2}.$$

Logo o coeficiente de ajustamento \tilde{R} é dado por $\tilde{R} = \frac{2(c-\mu)}{\sigma^2}$,

Verifica-se que, conforme a distribuição das indemnizações agregadas, o cálculo do coeficiente de ajustamento pode não ser uma tarefa simples. Assim, é apresentada a seguir uma forma de estimar este coeficiente.

Relembre que $M_S(t) = E[e^{tS}]$, então

$$\frac{d}{dt} \log(M_S(t)) \Big|_{t=0} = \frac{M'_S(0)}{M_S(0)} = M'_S(0),$$

e

$$\frac{d^2}{dt^2} \log(M_S(t)) \Big|_{t=0} = \frac{M''_S(t)M_S(t) - (M'_S(t))^2}{(M_S(t))^2} \Big|_{t=0} = M''_S(0) - (M'_S(0))^2.$$

Tendo em conta a expansão da série de Taylor da função exponencial, pode-se escrever

$$M_S(t) = E[e^{tS}] = E \left[1 + tS + \frac{t^2 S^2}{2!} + \dots \right] = 1 + tE[S] + \dots,$$

donde resulta que $M'_S(0) = E[S] = \mu$ e $M''_S(0) = E[S^2]$.

Logo, conclui-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log(M_S(t)) \Big|_{t=0} &= \mu \\ \frac{d^2}{dt^2} \log(M_S(t)) \Big|_{t=0} &= \text{Var}(S) = \sigma^2. \end{aligned}$$

E pela série de Taylor da função logaritmo tem-se que

$$\log(M_S(t)) = \mu t + \frac{1}{2} \sigma^2 t^2 + \dots,$$

uma vez que $\log(M_S(0)) = \log(1) = 0$.

Ignorando termos de ordem superior a t^2 , a expressão (3.1.4) escreve-se como

$$\log(M_S(r)) = rc \Leftrightarrow \mu r + \frac{1}{2} \sigma^2 r^2 = rc \Leftrightarrow \tilde{R} \cong \frac{2(c-\mu)}{\sigma^2},$$

que coincide com o resultado obtido no Exemplo 3.1.12, para indemnizações agregadas com distribuição $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Neste caso a aproximação coincide com o valor obtido rigorosamente, o que nem sempre acontece.

Lema 3.1.13. *Uma estimativa do coeficiente de ajustamento para $S(\cdot)$ com distribuição*

composta, isto é, $S = X_1 + \dots + X_N$ é dada por

$$\tilde{R} \approx \frac{2\alpha p_1 E[N]}{(p_2 - p_1^2)E[N] + p_1^2 \text{Var}(N)},$$

onde $p_i = E[S^i]$ e α é definido por $c = (1 + \alpha)E[N]p_1$.

Demonstração. É possível generalizar o cálculo da estimativa do coeficiente de ajustamento, para $S(\cdot)$ com distribuição composta. Tendo em conta o Lema 2.7.11, tem-se que

$$\log(M_S(r)) = rp_1 E[N] + \frac{1}{2}r^2 \left[E[N](p_2 - p_1^2) + p_1^2 \text{Var}(N) \right],$$

e assim sendo, pela expressão (3.1.4) obtém-se

$$rp_1 E[N] + \frac{1}{2}r^2 \left\{ E[N](p_2 - p_1^2) + p_1^2 \text{Var}(N) \right\} = rc.$$

Considerando $c = (1 + \alpha)E[N]p_1$, obtém-se que

$$\begin{aligned} rc &= (1 + \alpha)E[N]rp_1 = rp_1 E[N] + \frac{1}{2}r^2 \left\{ E[N](p_2 - p_1^2) + p_1^2 \text{Var}(N) \right\} \\ \Leftrightarrow r \left[(1 + \alpha)p_1 E[N] - p_1 E[N] \right] - \frac{1}{2}r^2 \left[E[N](p_2 - p_1^2) + p_1^2 \text{Var}(N) \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \tilde{R} &= \frac{2(E[N](1 + \alpha)p_1 - p_1 E[N])}{(p_2 - p_1^2)E[N] + p_1^2 \text{Var}(N)} \\ \Leftrightarrow \tilde{R} &= \frac{2\alpha p_1 E[N]}{(p_2 - p_1^2)E[N] + p_1^2 \text{Var}(N)}. \end{aligned}$$

□

3.1.1 Aplicação dos martingais à teoria da ruína

Nesta secção, assume-se que $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função decrescente, de tal forma que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma(x) = 0$.

Teorema 3.1.14. *Seja $U(n)$ o capital da seguradora ao fim do período n e seja $\gamma(\cdot)$ uma função que satisfaz as condições definidas anteriormente de tal forma que $\{\gamma(U(n))\}_{n \geq 0}$ é um supermartingal. Então*

$$\psi(u) \leq \frac{\gamma(u)}{\gamma(0)}. \quad (3.1.6)$$

Demonstração. Note-se que a probabilidade de ruína consiste na probabilidade de que o

capital, no fim do período n , seja negativo, considerando o capital inicial u , isto é,

$$\begin{aligned}\psi(u) &= P(U(n) < 0 \text{ para algum } n \geq 1 \mid U(0) = u) \\ &= P(\gamma(U(n)) > \gamma(0) \text{ para algum } n \geq 1 \mid U(0) = u) \\ &= P\left(\max_{n \geq 1} \gamma(U(n)) > \gamma(0) \mid U(0) = u\right).\end{aligned}$$

A segunda igualdade é obtida pelo facto da função γ ser decrescente, e a terceira pela definição de máximo.

Por hipótese $\{\gamma(U(n))\}_{n \geq 0}$ é um supermartingal. Como $\gamma(\cdot)$ é uma função positiva, então pode-se aplicar a desigualdade de Kolmogorov para supermartingais positivos, veja a equação (2.9.7), obtendo-se

$$\psi(u) = P\left(\max_{n \geq 1} \gamma(U(n)) > \gamma(0)\right) \leq \frac{\gamma(u)}{\gamma(0)}. \quad (3.1.7)$$

□

Teorema 3.1.15. (Teorema fundamental do risco)

Seja $\gamma(\cdot)$ uma função que satisfaz as condições referidas acima e de tal forma que $\{\gamma(U(n))\}_{n \geq 0}$ é um martingal onde $U(n)$ representa o capital da seguradora no fim do período n e $u \geq 0$, então

$$\psi(u) = \frac{\gamma(u)}{E[\gamma(U(T)) \mid T < +\infty]}. \quad (3.1.8)$$

A prova deste resultado pode ser vista no Apêndice do Capítulo 13 de [1].

Seja $R > 0$. Tendo em conta que a função $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\gamma(x) = e^{-Rx}$ é uma função decrescente tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma(x) = 0$, é possível provar que $\{\gamma(U_n)\}_{n \geq 0}$ é um martingal. Esse é o conteúdo do próximo lema.

Lema 3.1.16. $\{e^{-RU(n)}\}_{n \geq 0}$ é um martingal relativamente a $\{S_n\}_{n \geq 0}$, onde $U(n)$ se define por $U(n) = u + cn - \sum_{k=1}^n S_k$, $\{S_n\}_{n \geq 0}$ é uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória S com função geradora de momentos e R designa o coeficiente de ajustamento.

Demonstração. Relembre a definição de martingal dada na Definição 2.9.1. A condição 1, ou seja, $E[e^{-RU(n)}] < +\infty$ resulta da existência da função geradora de momentos de S . Designando $\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, \dots, S_n)$, ou seja, \mathcal{F}_n é a σ -álgebra gerada pelas variáveis

aleatórias $\{S_n\}_{n \geq 1}$, verifica-se facilmente que $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 1}$ é um filtro e além disso:

$$\begin{aligned} E[e^{-RU(n+1)} | \mathcal{F}_n] &= E \left[e^{-R(U(n)+c-S_{n+1})} \middle| \mathcal{F}_n \right] \\ &= e^{-RU(n)} E \left[e^{R(S_{n+1}-c)} \middle| \mathcal{F}_n \right] \\ &= e^{-RU(n)}. \end{aligned}$$

Onde a segunda e terceira igualdades resultam da propriedade **EC1** e da propriedade **EC8**, respetivamente, da Secção 2.8. Assim, a condição 2 da Definição 2.9.1 é também satisfeita. A condição 3 da Definição 2.9.1 é provada de uma forma trivial, uma vez que $e^{-RU(n)} = \tilde{s}(S_0, \dots, S_n)$, onde

$$\begin{aligned} \tilde{s} : \mathbb{R}^{n+1} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s_0, \dots, s_n) &\rightarrow e^{-R[u+cn-s_0-\dots-s_n]}. \end{aligned}$$

□

Assim pode enunciar-se o seguinte corolário:

Corolário 3.1.17. *Para $u \geq 0$,*

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} | T < +\infty]}. \quad (3.1.9)$$

Uma vez que T designa o tempo de ruína, tem-se que $U(T) < 0$ e como $R > 0$, é possível concluir que $e^{-RU(T)} \geq 1$. Daqui obtém-se o seguinte lema.

Lema 3.1.18. (Desigualdade de Lundberg)

Para $u \geq 0$, tem-se que

$$\psi(u) < e^{-Ru}.$$

Assume-se no modelo em tempo discreto que as indemnizações agregadas são variáveis aleatórias independentes, o que pode ser considerado irrealista (consulte [1]). Considere que o capital da seguradora no fim do período n é dado por

$$U(n) = u + nc - S_n, \quad (3.1.10)$$

em tudo semelhante a (3.1.1), com $S_n = W_1 + \dots + W_n$, onde W_i representa a soma das indemnizações efetuadas até ao tempo i , mas sendo para $i \geq 1$

$$W_i = X_i + aW_{i-1}, \quad (3.1.11)$$

$-1 < a < 1$ e $\{X_i\}_{i \geq 1}$ são independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória X com $E[X] < (1-a)c$.

Seja $X_0 = x$ e note agora que a probabilidade de ruína é uma função de duas variáveis u e x , isto é, $\psi(u, x) = P(T < +\infty | U(0) = u, X_0 = x)$. Recorrendo à expressão (3.1.11), tem-se

$$W_i = X_i + aX_{i-1} + \dots + a^{i-1}X_1 + a^i x. \quad (3.1.12)$$

Logo,

$$\begin{aligned} S_n &= X_n + (1+a)X_{n-1} + \dots + (1+a+\dots+a^{n-1})X_1 + (a+a^2+\dots+a^n)x \\ &= X_n + \frac{1-a^2}{1-a}X_{n-1} + \dots + \frac{1-a^n}{1-a}X_1 + a \frac{1-a^n}{1-a}x. \end{aligned}$$

Daqui resulta que X_1 contribui $\frac{X_1}{1-a}$ para as indemnizações agregadas, logo assume-se $c > \frac{E[X_1]}{1-a}$ e define-se o coeficiente de ajustamento \tilde{R} como a solução positiva da equação $M_{X/(1-a)}(r) = e^{cr}$, e assim

$$\log(E[e^{\frac{\tilde{R}X}{1-a}}]) - c\tilde{R} = 0.$$

Note que \tilde{R} depende da distribuição de X e dos valores de a e c .

É também possível obter o Teorema fundamental do risco neste contexto.

Teorema 3.1.19. (Teorema fundamental do risco)

$$\psi(u, x) = \frac{e^{-\tilde{R}\hat{u}}}{E[e^{-\tilde{R}\hat{U}(T)} | T < +\infty]}, \quad (3.1.13)$$

onde $u \geq 0$, e

$$\begin{aligned} \hat{U}(n) &= U(n) - \frac{a}{1-a}X_n, \\ \hat{u} &= \hat{U}(0), \text{ isto é } \hat{u} = u - \frac{a}{1-a}x. \end{aligned}$$

O leitor pode consultar a prova deste teorema no Apêndice do Capítulo 13 de [1].

Heuristicamente, $\hat{U}(n)$ é um capital modificado, ou seja, é o capital $U(n)$ ajustado por todas as futuras indemnizações que estão relacionadas com S_n .

No caso de $a \geq 0$, então $\hat{U}(T) \leq U(T) < 0$. Assim, o denominador da expressão (3.1.13) é superior a 1 e é possível obter o seguinte corolário.

Corolário 3.1.20. Se $0 \leq a < 1$, então $\psi(u, x) \leq e^{-\tilde{R}\hat{u}}$.

3.2 Modelo de Crámer-Lundberg em tempo contínuo

De forma semelhante ao feito na secção anterior, vai assumir-se que o tempo é contínuo. Considera-se o chamado modelo de Crámer-Lundberg.

Seja $\{U(t)\}_{t \geq 0}$ o capital de uma seguradora no tempo t e $U(0) = u \geq 0$ representa o capital inicial. Assume-se que os pagamentos à seguradora chegam continuamente a uma taxa constante $c > 0$, os pagamentos das indemnizações são feitos em tempos aleatórios, T_1, T_2, \dots ($T_1 < T_2 < \dots$), e as quantidades a serem pagas nestes tempos são descritas por variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots . Ou seja, considera-se que o primeiro acidente ocorre no tempo T_1 e a seguradora indemniza o cliente no valor X_1 , o segundo acidente ocorre no tempo T_2 e a seguradora indemniza o cliente num valor X_2 e assim em diante. Também se assume que estas variáveis aleatórias são independentes e indenticamente distribuídas a uma variável aleatória X com função de distribuição $F_X(x) = P(X \leq x)$ tal que $F_X(0) = 0$, ou seja, as variáveis aleatórias $\{X_i\}_{i \geq 1}$ são positivas e considera-se que $X_0 = 0$. A notação utilizada para o valor esperado das indemnizações particulares é a seguinte

$$\mu = E[X] = \int_0^{+\infty} x dF_X(x) = \int_{\Omega} X(\omega) dP < +\infty.$$

O modelo usado é descrito pela expressão:

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad (3.2.1)$$

onde $S(t) = \sum_{i \geq 0} X_i \mathbf{1}_{\{T_i \leq t\}}$ é a variável que representa as indemnizações agregadas que resultam do pagamento das indemnizações por parte da seguradora aos seus clientes até ao tempo $t > 0$. Seja $N(t) = \sum_{i \geq 0} \mathbf{1}_{\{T_i \leq t\}}$, com $N(0) = 0$, o processo que conta o número de acidentes que ocorreram até ao tempo t , que de acordo com a nossa hipótese coincide com o número de indemnizações efetuadas pela seguradora até ao tempo t . Neste modelo vai considerar-se $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ como sendo um processo de Poisson homogéneo de parâmetro λt . Sendo assim, tem-se que

$$S(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} X_i,$$

e $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson composto.

Na figura a seguir encontra-se representada uma possível trajetória para $N(t)$, processo de Poisson. Tendo em conta que o primeiro acidente ocorre no tempo T_1 , o segundo acontece no tempo T_2 , e assim sucessivamente. Até à ocorrência do primeiro sinistro, este processo toma o valor 0, já que $N(t)$ conta o número de acidentes que ocorreram até ao tempo t . Em cada um dos tempos seguintes, o processo vai tomando valores espaçados

de uma unidade, já que no tempo T_1 ocorreu 1 sinistro, em T_2 ocorreu mais um sinistro que em T_1 , assim $N(T_2) = 2$, e assim continuamente.

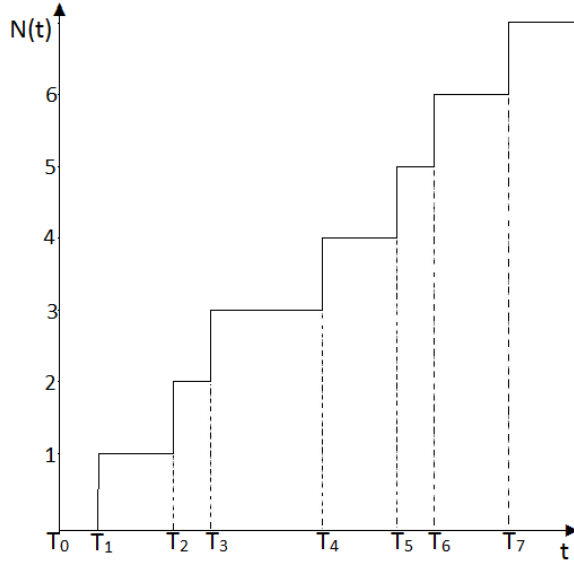


Figura 3.3: Possível trajetória do processo de Poisson $N(t)$.

Considera-se que a ruína ocorre quando o capital da seguradora é negativo, ou por vezes, quando é inferior a um determinado valor considerado a barreira de ruína. Assim, é possível definir tempo de ruína como o primeiro momento em que ocorre ruína.

Definição 3.2.1. (Tempo de ruína)

Seja T o primeiro momento em que ocorre a ruína, isto é, $T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$.

A probabilidade de ocorrer ruína, assumindo um capital inicial u e horizonte temporal finito é definida da seguinte forma.

Definição 3.2.2. (Probabilidade de ruína)

A probabilidade de ruína é definida por $\psi(u) = P(T < +\infty | U(0) = u)$.

É possível definir a probabilidade de sobrevivência como a probabilidade da ruína não ocorrer em horizonte temporal finito, considerando u como o capital inicial da seguradora.

Definição 3.2.3. (Probabilidade de sobrevivência)

A probabilidade de sobrevivência é definida por $\delta(u) = 1 - \psi(u)$.

De forma semelhante ao exigido no modelo em tempo discreto, espera-se um capital, no tempo t , superior ao que foi inicialmente investido, ou seja, assume-se que $c > \lambda\mu$,

onde λ é um dos parâmetros do processo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ e $\mu = E[X]$, uma vez que

$$\begin{aligned} E[U(t)] > E[U(0)] &\Leftrightarrow E[u + ct + S(t)] > \mu \\ &\Leftrightarrow u + ct - E[S(t)] > u \\ &\Leftrightarrow ct - \lambda \mu t > 0. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Atrás usa-se o Corolário 2.7.10.

O coeficiente de segurança e o coeficiente de ajustamento são quantidades importantes quando se pretende analisar a probabilidade de ruína.

Definição 3.2.4. (Coeficiente de segurança)

Define-se o coeficiente de segurança α pela equação

$$c = (1 + \alpha)\lambda\mu. \quad (3.2.3)$$

Definição 3.2.5. (Coeficiente de ajustamento)

Define-se o coeficiente de ajustamento R como a solução positiva da equação:

$$rc = \lambda (M_X(r) - 1), \quad (3.2.4)$$

onde $M_X(r)$ denota a função geradora de momentos da variável aleatória X , $r < \eta$ e η designa-se por supremo dos valores v para os quais exista $M_X(r)$ no intervalo $(-\infty, v)$.

Abaixo prova-se que o coeficiente de ajustamento pode ser definido de outras formas equivalentes.

Lema 3.2.6. *O coeficiente de ajustamento é definido como a única raiz positiva de*

$$1 + (1 + \alpha)\mu r = M_X(r), \quad (3.2.5)$$

onde $M_X(r)$ denota a função geradora de momentos da variável aleatória X , $r < \eta$ e $\mu = E[X]$.

Demonstração. A expressão anterior obtém-se, uma vez que

$$1 + (1 + \alpha)\mu r = 1 + \frac{cr}{\lambda} = 1 + (M_X(r) - 1) = M_X(r).$$

Onde a primeira igualdade se obtém através de (3.2.3) e a segunda através de (3.2.4).

□

A Figura 3.4 permite ilustrar a existência de uma única solução positiva da expressão (3.2.5).

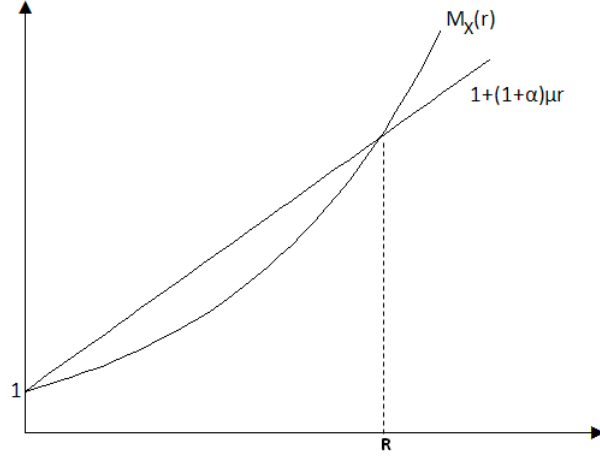


Figura 3.4: Existência do coeficiente de ajustamento - Modelo em tempo contínuo.

Ao analisar a equação (3.2.5) verifica-se que: o lado esquerdo da equação trata-se de uma função linear em r com 1 como ordenada na origem e $(1 + \alpha)\mu$ como declive; por outro lado é possível verificar que $\lim_{r \rightarrow \eta} M_X(r) = +\infty$, $M_X(0) = 1$, $M'_X(r) = E[Xe^{rX}]$, $M'_X(0) = \mu$, $M''_X(r) = E[X^2e^{rX}]$, de forma que o lado direito da equação é uma função crescente, convexa e que também toma o valor 1 na origem. Assumindo por hipótese (3.2.2), então $\alpha > 0$, desta forma o declive do lado esquerdo da equação excede o declive do lado direito da equação no ponto $r = 0$. Pode concluir-se que (3.2.5) tem duas soluções, uma trivial ($r = 0$) e outra positiva, que se designa por coeficiente de ajustamento.

Outra definição para o coeficiente de ajustamento é seguinte:

Lema 3.2.7. *O coeficiente de ajustamento é a única raiz positiva da equação*

$$\int_0^{+\infty} e^{Rx} (1 - F_X(x)) dx = \frac{c}{\lambda}. \quad (3.2.6)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{Rx} (1 - F_X(x)) dx &= \int_0^{+\infty} e^{Rx} \int_x^{+\infty} dF_X(y) dx = \int_0^{+\infty} \int_0^y e^{Rx} dx dF_X(y) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{R} e^{Rx} \Big|_{x=0}^{x=y} dF_X(y) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{R} (e^{Ry} - 1) dF_X(y) \\ &= \frac{1}{R} (M_X(R) - 1) = \frac{c}{\lambda}. \end{aligned}$$

A primeira igualdade resulta da definição da função de distribuição, veja a Definição 2.1.7, na segunda igualdade trocam-se os limites de integração, a quinta igualdade advém

da definição de função geradora de momentos, veja a Secção 2.4, e a sexta igualdade resulta da equação (3.2.5). \square

Teorema 3.2.8. (Teorema fundamental do risco)

Para $U(0) = u \geq 0$, onde R designa o coeficiente de ajustamento

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} | T < +\infty]}. \quad (3.2.7)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} E[e^{-rU(t)}] &= \int e^{-rU(t)} dP = \int_{\{T < t\}} e^{-rU(t)} dP + \int_{\{T \geq t\}} e^{-rU(t)} dP \\ &= \int \mathbf{1}_{\{T < t\}} e^{-rU(t)} dP + \int \mathbf{1}_{\{T \geq t\}} e^{-rU(t)} dP \\ &= E[e^{-rU(t)} | T < t] P(T < t) + E[e^{-rU(t)} | T \geq t] P(T \geq t). \end{aligned}$$

O leitor pode consultar a Secção 2.3 para melhor compreensão das expressões anteriores.

Suponha-se que $U(t) = u + Pt - S(t)$, onde $P > 0$ é a taxa constante relativa aos prémios pagos à seguradora, então tem-se que

$$\begin{aligned} E[e^{-rU(t)}] &= E[e^{-ru - rPt + rS(t)}] = e^{-ru - rPt} E[e^{rS(t)}] \\ &= e^{-ru - rPt + \lambda t [M_X(r) - 1]} = e^{-ru - rPt + rct}. \end{aligned}$$

Acima usa-se o Corolário 2.7.12.

Como no evento $\{T < t\}$,

$$\begin{aligned} U(t) - U(T) &= u + Pt - S(t) - (u + PT - S(T)) = Pt - PT - (S(t) - S(T)) \\ &= P(t - T) - (S(t) - S(T)), \end{aligned}$$

ou seja $U(t) = U(T) + P(t - T) - (S(t) - S(T))$. Uma vez que $U(T)$ é independente de $S(t) - S(T)$ (pelo facto de $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ ter incrementos independentes) e como $S(t) - S(T)$ tem distribuição de Poisson composta de parâmetro $\lambda(t - T)$, então

$$\begin{aligned} E[e^{-rU(t)} | T < t] &= E[e^{-rU(T) - rP(t-T) + rc(t-T)} | T < t] \\ &= E[e^{-rU(T)} | T < t] e^{-rP(t-T) + rc(t-T)}. \end{aligned}$$

Note-se que $\lim_{t \rightarrow +\infty} E[e^{-rU(t)} | T \geq t] = 0$, uma vez que se não ocorreu ruína tem-se que $\lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) = +\infty$.

Ao considerar $r = R$, ou seja, R é o coeficiente de ajustamento, partindo da expressão

$E \left[e^{-rU(t)} \right] = E \left[e^{-rU(t)} | T < t \right] P(T < t) + E \left[e^{-rU(t)} | T \geq t \right] P(T \geq t)$, como $P = c$ e calculando o limite quando t tende a $+\infty$, obtém-se

$$e^{-Ru} = E \left[e^{-rU(t)} | T < +\infty \right] P(T < +\infty),$$

ou seja,

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E \left[e^{-rU(T)} | T < +\infty \right]}.$$

□

Lema 3.2.9. (Desigualdade de Lundberg)

Para $u \geq 0$, tem-se que $\psi(u) < e^{-Ru}$, onde R é o coeficiente de ajustamento.

Demonstração. Basta notar que $E \left[e^{-rU(T)} | T < +\infty \right] > 1$, uma vez que pela definição de tempo de ruína, em T tem-se que $U(T) < 0$, pela definição de coeficiente de ajustamento $R > 0$ e pela propriedade **EC3** se $e^{-rU(T)} > 1$ então prova-se que o denominador de (3.2.7) é superior à unidade. □

Nota 3.2.10. Tendo em conta a hipótese (3.2.2) e a expressão (3.2.5), verifica-se que no caso de $\lambda\mu > c$, o declive de $1 + (1 + \alpha)\mu r$ é inferior ao declive da função geradora de momentos de X . Assim sendo, apenas $R = 0$ é a solução da equação (3.2.5). Desta forma, conclui-se, pela equação (3.2.7), que a probabilidade de ruína $\psi(u) = 1, \forall u > 0$ e assim $\delta(u) = 0, \forall u > 0$.

Nota 3.2.11. Note que fixado $u \geq 0$, tem-se que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \psi(u) = 0$, isto é, quanto maior for o coeficiente de ajustamento, menor será a probabilidade de ruína.

Analogamente, fixado $R > 0$, tem-se que $\lim_{u \rightarrow +\infty} \psi(u) = 0$, isto é, quanto maior for o capital inicial, menor será a probabilidade de ruína.

De forma equivalente,

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \delta(u) = 1. \quad (3.2.8)$$

Lema 3.2.12. Se as indemnizações particulares são limitadas superiormente de tal modo que $F_X(x_{\max}) = 1$ onde $x_{\max} > 0$, para algum x_{\max} finito, então

$$\psi(u) > e^{-R(u+x_{\max})}. \quad (3.2.9)$$

Demonstração. Por definição de T , tem-se que $U(T^-) > 0$. Logo, sendo o valor máximo da indemnização dado por x_{\max} , tem-se que $U(T) \geq -x_{\max}$, veja a Figura 3.5:

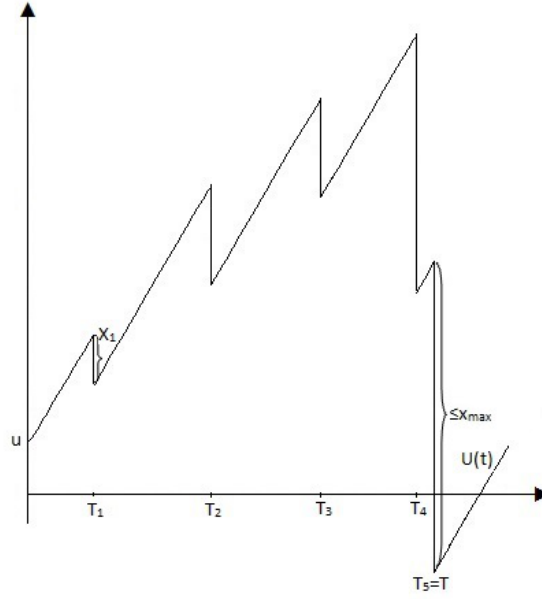


Figura 3.5: Possível trajetória do capital de reserva - indenizações limitadas superiormente.

Alternativamente, é possível fazer o mesmo raciocínio da seguinte forma. Como $F_X(x_{\max}) = 1$, tem-se que $X_i \leq x_{\max}$, e assim

$$-\sum_{i=1}^{N(T)} X_i = -X_1 - \dots - X_{N(T)} \geq -x_{\max},$$

ou seja, $-S(T) \geq -x_{\max}$. Como $u > 0$ e $c > 0$, então conclui-se que

$$U(T) \geq -x_{\max}.$$

Assim, $e^{-RU(T)} \leq e^{Rx_{\max}}$ e portanto, pela expressão (3.2.7) obtém-se que

$$\psi(u) > \frac{e^{-Ru}}{e^{Rx_{\max}}},$$

ou seja $\psi(u) > e^{-R(u+x_{\max})}$. □

Exemplo 3.2.13. (*X com distribuição Exponencial de parâmetro θ*) Vai calcular-se a probabilidade de ruína para o caso de as indenizações particulares terem distribuição exponencial de parâmetro θ . Vai-se começar por verificar que $-U(T)$ também tem distribuição exponencial com parâmetro θ . Seja T o instante em que ocorre a ruína, \hat{u} as reservas imediatamente antes de T e $y > 0$. Os acontecimentos $-U(T) > y$ e $X > \hat{u} + y | X > \hat{u}$ (lembre que X representa o montante da indemnização que causou a

ruína) são equivalentes, assim para $y > 0$

$$\begin{aligned} P(-U(T) > y | T < +\infty) &= P(X > \hat{u} + y | X > \hat{u}) = P(X > y) \\ &= 1 - P(X \leq y) = 1 - F_X(y) \\ &= 1 - (1 - e^{-\theta y}) = e^{-\theta y}. \end{aligned}$$

Daqui resulta que $-U(T)$ tem distribuição Exponencial de parâmetro θ . Logo, pela Tabela 2.6 obtém-se $E[e^{-RU(T)} | T < +\infty] = \frac{\theta}{\theta - R}$.

A expressão (3.2.3) é equivalente a $\alpha = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$ e a expressão (3.2.4) é equivalente a $R = \frac{\alpha\theta}{1+\alpha}$, sendo assim:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} | T < +\infty]} = \frac{e^{(-\alpha\theta u/(1+\alpha))}}{\left(\frac{\theta}{\theta - R}\right)} \\ &= \frac{\theta - R}{\theta} e^{(-\alpha\theta u/(1+\alpha))} = \frac{1}{1 + \alpha} e^{(-\alpha\theta u/(1+\alpha))}. \end{aligned}$$

Este é um exemplo em que se consegue obter exatamente o valor de $\psi(u)$.

Na equação (3.2.7) exige-se a existência do coeficiente de ajustamento. No Teorema a seguir esta exigência não se faz.

Teorema 3.2.14. Para $u > 0$, tem-se que

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c} \left[\psi(u) - \int_0^u \psi(u-x) dF_X(x) - (1 - F_X(u)) \right]. \quad (3.2.10)$$

Demonstração. É possível definir a probabilidade de ruína da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P(T < +\infty, \text{não ocorre sinistro em } (0, dt)) \\ &\quad + P(T < +\infty, \text{ocorre 1 sinistro em } (0, dt)) \\ &\quad + P(T < +\infty, \text{ocorre mais do que 1 sinistro em } (0, dt)) \\ &= \underbrace{P(T < +\infty, N(dt) = 0)}_A + \underbrace{P(T < +\infty, N(dt) = 1)}_B + \underbrace{P(T < +\infty, N(dt) > 1)}_C. \end{aligned}$$

Onde,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= P(T < +\infty | N(dt) = 0) P(N(dt) = 0) = P(T < +\infty | S(dt) = 0) P(N(dt) = 0) \\
 &= P(T < +\infty | U(dt) = u + cdt) P(N(dt) = 0) = \psi(u + cdt)(1 - \lambda dt) \\
 \mathbf{B} &= P(T < +\infty | N(dt) = 1) P(N(dt) = 1) \\
 &= P(T < +\infty, X > u + cdt | N(dt) = 1) \lambda dt + P(T < +\infty, X \leq u + cdt | N(dt) = 1) \lambda dt \\
 &= (1 - F_X(u + cdt)) \lambda dt + \left(\int_0^{u+cdt} \psi(u + cdt - x) dF_X(x) \right) \lambda dt \\
 \mathbf{C} &= o(dt).
 \end{aligned}$$

Acima usaram-se as propriedades do processo de Poisson homogéneo, veja a Definição 2.7.6. Assim,

$$\begin{aligned}
 \psi(u) &= (1 - \lambda dt) \psi(u + cdt) + \lambda dt \int_0^{u+cdt} \psi(u + cdt - x) dF_X(x) \\
 &\quad + \lambda dt (1 - F_X(u + cdt)) + o(dt).
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 \psi(u) &= \psi(u + cdt) \\
 &\quad - \lambda dt \left[\psi(u + cdt) - \int_0^{u+cdt} \psi(u + cdt - x) dF_X(x) - [1 - F_X(u + cdt)] \right] + o(dt),
 \end{aligned}$$

o que é equivalente a ter $\psi(u + cdt) - \psi(u)$ igual a

$$\lambda dt \left[\psi(u + cdt) - \int_0^{u+cdt} \psi(u + cdt - x) dF_X(x) - [1 - F_X(u + cdt)] \right] + o(dt).$$

Donde se conclui que,

$$\frac{\psi(u + cdt) - \psi(u)}{cdt}$$

se escreve como

$$\frac{\lambda}{c} \left[\psi(u + cdt) - \int_0^{u+cdt} \psi(u + cdt - x) dF_X(x) - [1 - F_X(u + cdt)] \right] + \frac{o(dt)}{cdt}.$$

Tomando o limite quando dt tende a zero, se conclui que

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c} \left[\psi(u) - \int_0^u \psi(u - x) dF_X(x) - [1 - F_X(u)] \right].$$

□

Observação: O Teorema 3.2.14 pode também ser enunciado através da probabilidade de sobrevivência, definida por $\delta(u) = 1 - \psi(u)$, ou seja para $u > 0$

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c} \left[\delta(u) - \int_0^u \delta(u-x) dF_X(x) \right]. \quad (3.2.11)$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \delta'(u) &= (1 - \psi(u))' \\ &= -\psi'(u) \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[-1 + \delta(u) + \int_0^u (1 - \delta(u-x)) dF_X(x) + (1 - F_X(u)) \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[-1 + \delta(u) + \int_0^u dF_X(x) - \int_0^u \delta(u-x) dF_X(x) + 1 - F_X(u) \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[\delta(u) - \int_0^u \delta(u-x) dF_X(x) \right]. \end{aligned}$$

Note-se que na terceira igualdade se usa a expressão (3.2.10). □

Tendo em conta o Teorema 3.2.14, é possível escrever $\psi(u)$ de uma outra forma. Assim,

Teorema 3.2.15. Para $u \geq 0$

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^{+\infty} (1 - F_X(x)) dx + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \psi(u-x)(1 - F_X(x)) dx. \quad (3.2.12)$$

De forma equivalente se pode dizer que para $u \geq 0$,

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x)(1 - F_X(x)) dx. \quad (3.2.13)$$

Demonstração. Prova-se (3.2.13) integrando (3.2.11) entre 0 e t , ou seja

$$\int_0^t \delta'(u) du = \frac{\lambda}{c} \left[\int_0^t \delta(u) du - \int_0^t \int_0^u \delta(u-x) dF_X(x) du \right] \quad (3.2.14)$$

Para este cálculo efectua-se uma mudança da ordem de integração e uma mudança de variável $\xi = u - x$, assim,

$$\delta(t) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(u) du - \frac{\lambda}{c} \int_0^t \left(\int_0^{t-x} \delta(\xi) d\xi \right) dF_X(x).$$

Definindo $W(v) = \int_0^v \delta(\xi) d\xi$ e efectuando a integração por partes, obtém-se

$$\delta(t) - \delta(0) = \frac{\lambda}{c} W(t) - \frac{\lambda}{c} \left(W(t) - \int_0^t \delta(t-x)(1 - F_X(x)) dx \right),$$

ou seja,

$$\delta(t) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \delta(t-x)(1 - F_X(x)) dx.$$

Daqui resulta a prova de (3.2.13). Agora prove-se a afirmação com respeito a $\psi(\cdot)$. Então, uma vez que $\delta(t) = 1 - \psi(t)$, tem-se pela igualdade anterior que

$$1 - \psi(t) = 1 - \psi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^t (1 - \psi(t-x))(1 - F_X(x)) dx,$$

ou seja

$$\psi(t) = \psi(0) - \frac{\lambda}{c} \int_0^t (1 - \psi(t-x))(1 - F_X(x)) dx.$$

Reescreve-se a expressão atrás como:

$$\psi(t) = \psi(0) - \frac{\lambda}{c} \int_0^t (1 - F_X(x)) dx + \frac{\lambda}{c} \int_0^t \psi(t-x)(1 - F_X(x)) dx. \quad (3.2.15)$$

Considere-se $\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$ (veja o Lema 3.2.16). Logo, tem-se que os dois primeiros termos da expressão anterior podem ser escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \psi(0) - \frac{\lambda}{c} \int_0^t (1 - F_X(x)) dx &= \frac{\lambda\mu}{c} - \frac{\lambda}{c} \int_0^t (1 - F_X(x)) dx = \frac{\lambda}{c} \left[\mu - \int_0^t (1 - F_X(x)) dx \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \left[\int_0^{+\infty} (1 - F_X(x)) dx - \int_0^t (1 - F_X(x)) dx \right] \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_t^{+\infty} (1 - F_X(x)) dx, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade resulta do Lema 2.3.2. Ao substituir o resultado anterior em (3.2.15), obtém-se a expressão (3.2.12). \square

Tendo em conta que neste trabalho se assume que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um processo de Poisson composto, o coeficiente de ajustamento passa a ser designado por R , tanto no modelo discreto como no contínuo. Para demonstrar esta concordância, devemos relembrar as características do Processo de Poisson composto, nomeadamente o Lema 2.7.11 referente à função geradora de momentos, assim como a equação do coeficiente de ajustamento no caso discreto (3.1.4) e no caso contínuo (3.2.4). Ora no caso discreto, este coeficiente é

calculado através da expressão $E\left[e^{r(S-c)}\right] = 1$, ou seja,

$$\begin{aligned} E\left[e^{r(S-c)}\right] &= M_{N(t)}\left(\log(M_X(r))\right)e^{-rc} = e^{\lambda\left(e^{\log(M_X(r))}-1\right)}e^{-rc} \\ &= e^{\lambda\left(M_X(r)-1\right)}e^{-rc} = e^{\lambda\left(M_X(r)-1\right)-rc}. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

Daqui resulta que $\lambda(M_X(r) - 1) - rc = 0$, ou seja $\lambda(M_X(r) - 1) = rc$, expressão usada para o cálculo do coeficiente de ajustamento no caso contínuo.

Conclui-se esta secção com a apresentação de uma expressão que resulta do cálculo da probabilidade de ruína considerando nulo o capital inicial, ou seja, $u = 0$.

Lema 3.2.16. *A probabilidade de ruína assumindo o capital inicial como zero é dada por*

$$\psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}, \quad (3.2.17)$$

onde λ representa o parâmetro do processo de Poisson, μ a esperança das indemnizações particulares e c a constante que representa a taxa a que são efetuados os pagamentos à seguradora.

Demonstração. O resultado anterior pode ser provado manipulando a expressão (3.2.13). Veja mais pormenores em [5]. Abaixo apresenta-se uma prova alternativa seguida de [7].

Pela expressão (3.2.13) e uma vez que $\delta(\cdot) \leq 1$, tem-se que

$$\delta(u) - \delta(0) \leq \frac{\lambda}{c} \int_0^u (1 - F_X(x))dx.$$

Ao calcular o limite quando $u \rightarrow +\infty$ da expressão anterior obtém-se

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \delta(u) - \delta(0) \leq \frac{\lambda}{c} \int_0^{+\infty} (1 - F_X(x))dx.$$

Como, pela Nota 3.2.8 $\lim_{u \rightarrow +\infty} \delta(u) = 1$ e usando o Lema 2.3.2 obtém-se que

$$1 - \delta(0) \leq \frac{\lambda\mu}{c},$$

ou seja

$$\delta(0) \geq 1 - \frac{\lambda\mu}{c}. \quad (3.2.18)$$

Pela Desigualdade de Lundberg, veja o Lema 3.2.9, $\delta(u) \geq 1 - e^{-Ru}$, desta forma pela

expressão (3.2.13) tem-se que

$$\begin{aligned}\delta(u) - \delta(0) &\geq \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - e^{-R(u-x)}] [1 - F_X(x)] dx \\ &= \frac{\lambda}{c} \int_0^u [1 - F_X(x)] dx - \frac{\lambda}{c} e^{-Ru} \int_0^u e^{Rx} [1 - F_X(x)] dx.\end{aligned}$$

Tendo em conta a expressão (3.2.6) e fazendo $u \rightarrow +\infty$, tem-se pelo Lema 2.3.2 que

$$1 - \delta(0) \geq \frac{\lambda}{c} \int_0^{+\infty} [1 - F_X(x)] dx = \frac{\lambda \mu}{c}$$

ou seja

$$\delta(0) \leq 1 - \frac{\lambda \mu}{c}.$$

Da estimativa anterior e de (3.2.18), obtém-se que

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda \mu}{c}$$

o que termina a prova.

□

3.2.1 Aplicação dos martingais à teoria da ruína

Pretende-se, nesta secção, abordar o cálculo do risco numa companhia de seguros recorrendo à teoria de martingais em tempo contínuo.

Serão usadas definições muito próximas às usadas na Secção 3.2, mais concretamente, no modelo de Crámer-Lundberg assumimos as seguintes hipóteses:

(H1) As variáveis aleatórias $\{X_i\}_{i \geq 1}$, são independentes e identicamente distribuídas a uma variável aleatória X com função de distribuição $F_X(x) = P(X \leq x)$ tal que $F_X(0) = 0$, ou seja X é uma variável aleatória positiva e como anteriormente usa-se a notação $\mu = E[X] = \int_0^{+\infty} x dF_X(x) = \int_{\Omega} X(\omega) dP = \int_{\mathbb{R}} x \mu_X(dx) < +\infty$.

(H2) Os tempos $\{T_i\}_{i \geq 1}$, são tais que $T_0 = 0$ e para $i \geq 1$ é possível definir $\{\sigma_i\}_{i \geq 1}$ onde $\sigma_i = T_i - T_{i-1}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição Exponencial de parâmetro λ , isto é, com densidade $f_{\sigma_i}(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{[0, +\infty]}(x)$ para $i \geq 1$.

(H3) As sequências $\{T_i\}_{i \geq 1}$ e $\{X_i\}_{i \geq 1}$ são independentes.

Recorde-se que $N(t)$ representa o processo que conta o número de indemnizações ocorridas até ao tempo t , ou seja, este processo tem trajetória constante por pedaços, com saltos de uma unidade que ocorrem nos tempos T_1, T_2, \dots , e $N(0) = 0$, veja a Figura 3.3 relativa a uma possível trajetória de $N(t)$.

Lema 3.2.17. *Fixe $t > 0$, $N(t)$ tem distribuição de Poisson de parâmetro λt .*

Poderá ver uma prova alternativa deste resultado em [2]. Abaixo apresenta-se uma prova seguida de [8].

Demonstração. Vai-se estudar o evento $\{T_k > t\}$. Note que

$$T_k = T_k - T_{k-1} + T_{k-1} - T_{k-2} + \dots + T_1 - T_0 = \sigma_k + \sigma_{k-1} + \dots + \sigma_1.$$

Tem-se que $\{T_k > t\} = \{\sigma_{k-1} + \dots + \sigma_1 > t\}$. Por outro lado se o k -ésimo acidente ocorre depois do tempo t , isso é equivalente a dizer que o número de acidentes que ocorreram até ao tempo t é estritamente menor do que k , ou seja, $\{T_k > t\} = \{N(t) < k\}$. Assim $P(N(t) < k) = P(T_k > t) = P(\sigma_k + \sigma_{k-1} + \dots + \sigma_1 > t) = 1 - F_{\tilde{\sigma}_k}(t)$, considerando $\tilde{\sigma}_k = \sigma_k + \dots + \sigma_1$.

Pretende-se determinar a distribuição de $N(t)$, e sabe-se que $\{\sigma_i\}_{i \geq 1}$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição Exponencial de parâmetro λ . Recorre-se à função característica, veja a Definição 2.5.1, para encontrar a distribuição de $\tilde{\sigma}_k$.

Primeiramente, determina-se a função característica de σ_1 , recorrendo à Tabela 2.8. Alternativamente pode-se calcular

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma_1}(t) &= \int_0^{+\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^{+\infty} e^{(it-\lambda)x} dx = \frac{\lambda}{it-\lambda} e^{(it-\lambda)x} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} \\ &= \frac{\lambda}{it-\lambda} (0-1) = \frac{\lambda}{\lambda-it}. \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Com este resultado é possível determinar a expressão da função característica de $\tilde{\sigma}_k$, veja o Lema 2.6.4. Ora,

$$\begin{aligned} \varphi_{\tilde{\sigma}_k}(t) &= E[e^{it(\sigma_1 + \dots + \sigma_k)}] = E[e^{it\sigma_1} \dots e^{it\sigma_k}] = E[e^{it\sigma_1}] \dots E[e^{it\sigma_k}] \\ &= (E[e^{it\sigma_1}])^k = \left(\frac{\lambda}{\lambda-it} \right)^k. \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Pretende-se saber qual a distribuição da variável aleatória, tal que $\varphi_{\tilde{\sigma}_k}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-it} \right)^k$. Pela Tabela 2.8 e pelo Teorema da unicidade (veja o Teorema 6.2.2 de [3]), tem-se que

X tem distribuição Gamma, isto é, definida em $[0, +\infty)$ cuja função densidade é definida como $f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$. Então,

$$P(\sigma_1 + \dots + \sigma_k > t) = P(\tilde{\sigma}_k > t) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!}.$$

Logo, para $k \geq 1$

$$P(N_t < k) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^i}{i!}.$$

Conclui-se que a variável aleatória $N(t)$ tem distribuição de Poisson de parâmetro λt .

□

Lema 3.2.18. *O processo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ definido acima é um processo de Poisson homogêneo de parâmetro λt .*

Demonstração. Relembre a Definição 2.7.6, que pode ser sintetizada, e assim é necessário provar que

1. os incrementos são independentes;
2. para $t < s$, o incremento $N(t) - N(s)$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda(t - s)$.

É possível resolver o ponto 2 assumindo o ponto 1. Pelo lema anterior, sabe-se que $N(t)$ e $N(s)$ têm, respetivamente, distribuição $P(\lambda t)$ e $P(\lambda s)$, então

$$\begin{aligned} \varphi_{N(t)}(r) &= E \left[e^{irN(t)} \right] = E \left[e^{ir(N(t)-N(s)+N(s)-N(0))} \right] = E \left[e^{ir(N(t)-N(s))} e^{ir(N(s)-N(0))} \right] \\ &= E \left[e^{ir(N(t)-N(s))} \right] E \left[e^{ir(N(s)-N(0))} \right] = \varphi_{N(t)-N(s)}(r) \varphi_{N(s)}(r). \end{aligned}$$

A quarta igualdade obtém-se uma vez que os incrementos são independentes. Note que como $N(t)$ tem distribuição de Poisson de parâmetro λt tem-se que

$$\varphi_{N(t)}(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ikr} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^{ik} \lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t e^{ir}} = e^{\lambda t(e^{ir}-1)},$$

que coincide com a expressão obtida na Tabela 2.7. Assim sendo,

$$\varphi_{N(t)-N(s)}(r) = \frac{\varphi_{N(t)}(r)}{\varphi_{N(s)}(r)} = \frac{e^{\lambda t(e^{ir}-1)}}{e^{\lambda s(e^{ir}-1)}} = e^{(\lambda(t-s)(e^{ir}-1))}.$$

Pelo Teorema de unicidade (veja o Teorema 6.2.2 de [3]) tem-se que $N(t) - N(s)$ tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda(t - s)$.

Para provar que o processo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ tem incrementos independentes (isto é, o ponto 1), é necessário provar que, para $r < s < t$

$$P(N(t) - N(s) \in A, N(s) - N(r) \in B) = P(N(t) - N(s) \in A)P(N(s) - N(r) \in B),$$

onde $A, B \in \mathcal{B}$. Como $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ toma valores em \mathbb{N} , uma vez que se trata de um processo que conta o número de indemnizações ocorridas até ao tempo t , conclui-se que a expressão acima representa a probabilidade dos tempos das indemnizações ocorrerem nos intervalos de tempo $(s, t]$ e $(r, s]$.

Relembre que a sequência de tempos $\{T_i\}_{i \geq 1}$ são independentes, e os intervalos $(s, t]$ e $(r, s]$ são disjuntos, resulta que o processo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ tem incrementos independentes. \square

Considere-se agora a função $h(\cdot)$, definida por $h(z) = \int_0^{+\infty} (e^{zx} - 1) dF_X(x)$, para $z \geq 0$. Seja

$$g(z) = \lambda h(z) - cz. \quad (3.2.21)$$

Vai-se supor que $\exists r > 0$ tal que $h(r) < +\infty$.

Lema 3.2.19. *Para cada $t \geq 0$, seja $Z(t) = e^{-rU(t)-tg(r)}$ e*

$$\mathcal{G}_t = \sigma(U(s) : s \leq t) = \{U(s)^{-1}(a, b), \forall s \leq t, (a, b) \in \mathbb{R}\},$$

onde $U(t)$ representa o capital da seguradora no tempo t . Conclui-se que $(Z(t), \mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ é um martingal.

Demonstração. Para provar que $(Z(t), \mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ é um martingal, tem-se que provar os pontos 1, 2 e 3 da Definição 2.9.20.

Para provar o ponto 1, isto é, que \mathcal{G}_t é um filtro e que $Z(t) \in \mathcal{G}_t$, relembre a Definição 2.9.19. Começa-se por provar que \mathcal{G}_t é um filtro, ou seja $\mathcal{G}_s \subseteq \mathcal{G}_t, \forall s \leq t$. Como \mathcal{G}_s e \mathcal{G}_t podem ser representados como $\sigma(U(r) : r \leq s)$ e $\sigma(U(\tilde{r}) : \tilde{r} \leq t)$, respetivamente, e como $s \leq t$, então

$$(U(\tilde{r}) : \tilde{r} \leq t) \supseteq (U(r) : r \leq s).$$

Logo, $\mathcal{G}_s \subseteq \mathcal{G}_t$. Para provar que $Z(t) \in \mathcal{G}_t$ para cada $t \geq 0$, nota-se a seguinte observação. Fixa-se t e nota-se que r está fixado. Note-se que $Z(t) = \tilde{s}(U(t))$, onde \tilde{s}_t é a função definida por

$$\begin{aligned} \tilde{s}_t : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow e^{-rx-tg(r)}. \end{aligned}$$

Esta função é contínua, e como consequência $\tilde{s}_t(\cdot) \in \mathcal{B}$. Como $U(t) \in \mathcal{G}_t$, obtém-se que $Z(t) = \tilde{s}_t \circ U(t) \in \mathcal{G}_t$:

$$\begin{aligned} (\Omega, \mathcal{G}_t) &\longmapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \longmapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}) \\ \omega &\longmapsto U(t, \omega) \longmapsto \tilde{s}_t \circ U(t)(\omega) \end{aligned}$$

Prova-se de seguida o ponto 2 da Definição 2.9.20. Como

$$E[Z(t)] = E[e^{-r(U(t)-U(0))-rU(0)-tg(r)}] = e^{-tg(r)} e^{-rU(0)} E[e^{-r(U(t)-U(0))}] = e^{-ru},$$

então, $E[Z(t)] = e^{-ru} < +\infty$. Logo $Z(t)$ satisfaz a condição 2.

Seguidamente, prova-se o ponto 3 da Definição 2.9.20. Seja

$$h(z) = \int_0^{+\infty} (e^{-zx} - 1) dF_X(x) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} dF_X(x) - \int_0^{+\infty} dF_X(x) = \widehat{F}(-z) - 1, \quad (3.2.22)$$

onde $\widehat{F}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} dF_X(x)$ é a transformada de Laplace-Stieljes de $F_X(\cdot)$. Vai provar-se que $E[e^{-r(U(t)-U(0))}] = e^{tg(r)}$. Ora,

$$\begin{aligned} E[e^{-r(U(t)-U(0))}] &= E[e^{-r(U(t)-u)}] = E[e^{-r(ct-S(t))}] = e^{-rct} E[e^{rS(t)}] = e^{-rct} E[e^{r\sum_{i=0}^{N(t)} X_i}] \\ &= e^{-rct} E\left[\mathbf{1}_{\{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{N(t)=n\}\}} e^{r\sum_{i=0}^{N(t)} X_i}\right] = e^{-rct} \sum_{n=0}^{+\infty} E[\mathbf{1}_{\{N(t)=n\}} e^{r\sum_{i=0}^n X_i}] \\ &= e^{-rct} \sum_{n=0}^{+\infty} P(N(t)=n) E[e^{r\sum_{i=0}^n X_i}] = e^{-rct} \sum_{n=0}^{+\infty} P(N(t)=n) \prod_{i=1}^n E[e^{rX_i}] \\ &= e^{-rct} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} (h(r) + 1)^n = e^{-rct} e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t (h(r) + 1))^n}{n!} \\ &= e^{-rct} e^{-\lambda t} e^{\lambda t (h(r) + 1)} = e^{t(-rc + \lambda h(r))} = e^{tg(r)}. \end{aligned}$$

Onde a primeira, segunda e quarta igualdades advêm da expressão (3.2.1), a sexta igualdade é obtida através da propriedade **E3** da Secção 2.3, a sétima igualdade resulta das variáveis aleatórias $\{X_i\}_{i \geq 1}$ serem independentes de $\{N(t)\}_{t \geq 0}$, a oitava igualdade deve-se ao facto das variáveis aleatórias $\{X_i\}_{i \geq 1}$ serem independentes, a nona igualdade é obtida através da expressão (3.2.22) e pelo facto de $\{X_i\}_{i \geq 1}$ serem identicamente distribuídas e também pelo facto de $N(t)$ ter distribuição de Poisson de parâmetro λt , a décima primeira baseia-se no desenvolvimento de Taylor da exponencial, isto é, $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} = e^x$, e a décima terceira está relacionada com a expressão (3.2.21).

Analogamente se mostra que $E[e^{-r(U(t)-U(s))}] = e^{(t-s)g(r)}$. Uma vez que $U(t)$ tem

incrementos independentes, tem-se que

$$E[e^{-r(U(t)-U(s))}|\mathcal{G}_s] = E[e^{-r(U(t)-U(s))}] = e^{(t-s)g(r)}.$$

Daqui resulta que

$$\begin{aligned} E[e^{-rU(t)-tg(r)}|\mathcal{G}_s] &= E[e^{-r(U(t)-U(s))-tg(r)+sg(r)-rU(s)-sg(r)}|\mathcal{G}_s] \\ &= e^{-rU(s)-sg(r)} e^{-(t-s)g(r)} E[e^{-r(U(t)-U(s))}] \\ &= e^{-rU(s)-sg(r)}. \end{aligned}$$

Logo, $E[Z(t)|\mathcal{G}_s] = Z(s)$. □

Definição 3.2.20. Define-se a variável aleatória τ , com valores em $[0, +\infty)$, como um tempo de Markov para um filtro $(\mathcal{G}_s)_{s \geq 0}$ se para cada $t \geq 0$ o conjunto $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{G}_t$.

Se $Z(t) = e^{-rU(t)-tg(r)}$ é um martingal, então pelo Corolário 2.9.4 conclui-se que $E[Z(t)] = E[Z(0)]$, $\forall t \geq 0$. Assim, considerando $t \wedge T$ ou seja o ínfimo entre t e T , tem-se que

$$\begin{aligned} e^{-ru} &= E[Z(t \wedge T)] = E[e^{-rU(t \wedge T)-(t \wedge T)g(r)}] \\ &= E[e^{-rU(t \wedge T)-(t \wedge T)g(r)}(\mathbf{1}_{\{T \leq t\}} + \mathbf{1}_{\{T > t\}})] \\ &\geq E[e^{-rU(t \wedge T)-(t \wedge T)g(r)}\mathbf{1}_{\{T \leq t\}}] = E[e^{-rU(t \wedge T)-(t \wedge T)g(r)}|T \leq t]P(T \leq t) \\ &\geq E[\mathbf{1}_{\{U(t) \leq 0\}}e^{-rU(T)-Tg(r)}|T \leq t]P(T \leq t) \geq E[e^{-Tg(r)}|T \leq t]P(T \leq t) \\ &\geq E\left[\min_{0 \leq s \leq t} e^{-g(r)s}|T \leq t\right]P(T \leq t). \end{aligned}$$

Conclui-se então que

$$P(T < t) \leq \frac{e^{-ru}}{\min_{0 \leq s \leq t} e^{-sg(r)}} = e^{-ru} \max_{0 \leq s \leq t} e^{sg(r)}. \quad (3.2.23)$$

Considerando a definição de tempo de ruína T e relembrando que $g(r) = \lambda h(r) - cr$ e $h(r) = \int_0^{+\infty} (e^{rx} - 1)dF_X(x) = \hat{F}(-r) - 1$, é possível tirar algumas conclusões.

Se $r = 0$,

$$h(0) = \int_0^{+\infty} (e^0 - 1)dF_X(x) = 0 \text{ e } g(0) = \lambda h(0) = 0.$$

Relativamente à primeira derivada de cada uma das funções:

$$h'(r) = \int_0^{+\infty} x e^{rx} dF_X(x),$$

logo $h'(0) = \int_0^{+\infty} x dF_X(x) = E[X] = \mu$ e $g'(r) = \lambda h'(r) - c$. É possível concluir que $g'(0) = \lambda h'(0) - c = \lambda \mu - c < +\infty$. Quanto à segunda derivada, sabe-se que

$$h''(r) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{rx} dF_X(x),$$

assim $h''(0) = \int_0^{+\infty} x^2 dF_X(x) = E[X^2] \geq 0$ e $g''(r) = \lambda h''(r)$, logo $g''(0) = \lambda h''(0) \geq 0$. Desta forma, $g(\cdot)$ é tal que $g(0) = 0$, $g'(0) < 0$ e $g''(0) \geq 0$, isto significa que em torno de $r = 0$ a função $g(\cdot)$ é decrescente e possui concavidade virada para cima. Conclui-se então que $\exists R$, designado por coeficiente de ajustamento, tal que $g(R) = 0$ e $R \neq 0$. A expressão (3.2.23) pode ser reescrita da seguinte forma (relembre para tal a Definição 3.2.2)

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}$$

A expressão obtida corresponde à Desigualdade de Lundberg, veja o Lema 3.2.9.

Capítulo 4

Simulações teóricas

Neste capítulo recorre-se a simulações teóricas de forma a comparar o valor da probabilidade de ruína, $\psi(u)$, para diversas distribuições, assim como para diferentes valores de capital inicial, u . Ou seja, assume-se o modelo em tempo contínuo e portanto $S(t)$ é um processo de Poisson composto, que as indemnizações particulares seguem uma determinada distribuição, calcula-se o valor do prémio c , garantindo a hipótese (3.2.2) e calcula-se um valor aproximado do coeficiente de ajustamento com o auxílio do software Maple. Obtém-se um majorante da probabilidade de ruína $\psi(u)$ usando a Desigualdade de Lundberg, veja o Lema 3.2.9.

Em todas as simulações considera-se como o horizonte temporal 10 anos, ou seja, 3650 dias (aproximadamente), bem como a ocorrência de 730 indemnizações neste período de tempo. Desta forma, pode-se usar um estimador para λ , que será $\hat{\lambda}$, média do processo de Poisson, neste caso seria $\hat{\lambda} = \frac{730}{3650} = 0.2$. Também se irá considerar $\hat{c} = 250$, garantindo assim a condição (3.2.2), ou seja, assegurando a hipótese do capital no tempo t ser em média superior ao inicialmente investido.

É possível calcular exatamente a probabilidade de ruína para o caso do capital inicial ser nulo, isto é, $u = 0$, através do Lema 3.2.16. A dependência de $\psi(0)$ está em μ , λ e c . Nos exemplos abaixo o valor de $\hat{\lambda}$ é sempre tomado igual a 0.2, $\hat{\mu}$ assumido como 750 e $\hat{c} = 250$, assim obtém-se $\psi(0) = \frac{\hat{\lambda}\hat{\mu}}{\hat{c}} = \frac{0.2 \times 750}{250} = 0.6$.

Nos casos em que o valor do majorante da probabilidade para $\psi(u)$ é muito pequena, recorreu-se à numeração científica. Desta forma a notação $3.0e^{-3}$ representa o mesmo que 3.0×10^{-3} .

Da mesma forma que no capítulo anterior, sempre que se refere à probabilidade de ruína obtida através da desigualdade de Lundberg, enunciada no Lema 3.2.9, está-se a

referir a um majorante para esta probabilidade.

Apresentam-se de seguida as simulações teóricas assumindo que as indemnizações particulares têm distribuição discreta (Poisson, Geométrica e Binomial), ou absolutamente contínua (Exponencial, Uniforme, Normal e Gamma).

4.1 Indemnização particular discreta

Simulação 4.1.1. (Distribuição de Poisson) Vai-se considerar que as indemnizações particulares, $\{X_i\}_{i \geq 1}$ são identicamente distribuídas a uma variável aleatória X com distribuição de Poisson de parâmetro $\theta = 750$. É possível encontrar um valor aproximado do coeficiente de ajustamento $R \approx 0.00058$, ou seja, é a única solução da equação $250r = 0.2(e^{750(e^r-1)} - 1)$. Tal resulta de verificar que por definição, R é solução da equação (3.2.4) e a função geradora de momentos $M_X(r)$ dada por $M_X(r) = e^{750(e^r-1)}$, veja a Tabela 2.5. É possível encontrar o coeficiente de ajustamento, usando os seguintes comandos no programa Maple:

```
> e(r) := 250 * r;
> d(r) := (0.2) * (exp(exp(750 * r) - 1) - 1);
> plot([e(r), d(r)], r = 0.00056..0.0006, color = [green, red]);
```

Obtém-se a seguinte figura.

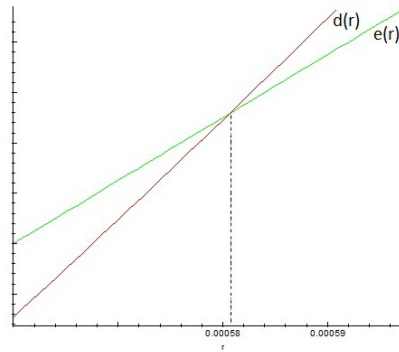


Figura 4.1: Coeficiente de ajustamento para $X \sim P(750)$.

Na Tabela 4.1 encontra-se o valor da probabilidade de ruína $\psi(u)$, mediante diferentes valores de capital inicial u , obtido pela Desigualdade de Lundberg.

u	500	1000	2000	5000	10000	15000	20000
$\psi(u)$	0.7483	0.5599	0.3135	0.0550	3.0e-3	1.7e-4	9.2e-6

Tabela 4.1: Majorante para a probabilidade de ruína para $X \sim P(750)$.

Como é possível verificar pela análise da tabela anterior, á medida que o capital inicial aumenta, naturalmente a probabilidade de ruína vai sendo cada vez menor.

Simulação 4.1.2. (Distribuição Geométrica) Vai-se considerar que as indemnizações particulares, $\{X_i\}_{i \geq 1}$ são identicamente distribuídas a uma variável aleatória X com distribuição Geométrica de parâmetro $1/750$. Pode-se então encontrar um valor aproximado do coeficiente de ajustamento $R \approx 0.00053$, ou seja é a única solução positiva da equação $250r = 0.2 \left(\frac{1/750}{1 - (1 - 1/750)e^r} - 1 \right)$.

Tal resulta de verificar que por definição, R é solução da equação (3.2.4) e a função geradora de momentos $M_X(r)$ neste caso é dada por $M_X(r) = \frac{1/750}{1 - (1 - 1/750)e^r}$, veja a Tabela 2.5. O coeficiente de ajustamento é a abcissa do ponto de intersecção de duas funções. A representação gráfica foi obtida através dos seguintes comandos:

```
> p := 1/750;
> e(r) := 250 * r;
> d(r) := (0.2) * (p / (1 - (1 - p) * exp(r)) - 1);
> plot([e(r), d(r)], r = 0.00047..0.00059, color = [green, red]);
```

Obtém-se a seguinte figura.

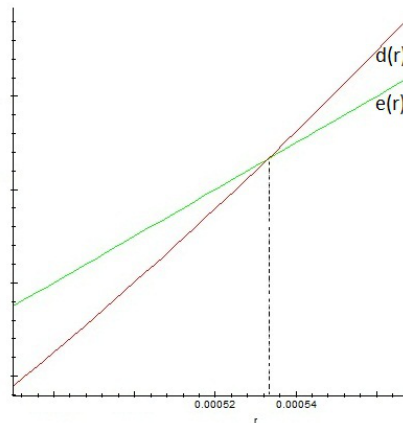


Figura 4.2: Coeficiente de ajustamento para $X \sim Geo\left(\frac{1}{750}\right)$.

Na Tabela 4.2 encontra-se o valor da probabilidade de ruína $\psi(u)$, mediante diferentes valores de capital inicial u , obtido pela Desigualdade de Lundberg.

u	500	1000	2000	5000	10000	15000	20000
$\psi(u)$	0.7672	0.5886	0.3465	0.0707	5.0e-3	3.5e-4	2.5e-5

Tabela 4.2: Majorante para a probabilidade de ruína para $X \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{750}\right)$.

Como seria de esperar, a probabilidade de ruína é tanto menor quanto maior o capital inicial.

Simulação 4.1.3. (Distribuição Binomial) Considera-se que as indenizações particulares, $\{X_i\}_{i \geq 1}$ são identicamente distribuídas a uma variável aleatória X com distribuição Binomial de parâmetros $n = 3000$ e $p = 0.25$. Note que da mesma forma que nas simulações anteriores, se tem $E[X] = 750$. Pode-se então encontrar uma aproximação para o coeficiente de ajustamento $R \approx 0.00126$, ou seja é a única solução positiva da equação

$$250r = 0.2 \left((0.25e^r + 1 - 0.25)^{3000} - 1 \right).$$

Tal resulta de verificar que por definição, R é solução da equação (3.2.4) e a função geradora de momentos $M_X(r)$ neste caso é dada por $M_X(r) = (0.25e^r + 1 - 0.25)^{3000}$, veja a Tabela 2.5. É possível encontrar o coeficiente de ajustamento, usando os seguintes comandos no programa Maple:

```
> e(r) := 250 * r;
> d(r) := (0.2) * ((0.25 * exp(r) + 1 - 0.25)^(3000) - 1);
> plot([e(r), d(r)], r = 0.00123..0.0013, color = [green, red]);
```

Obtém-se a seguinte figura.

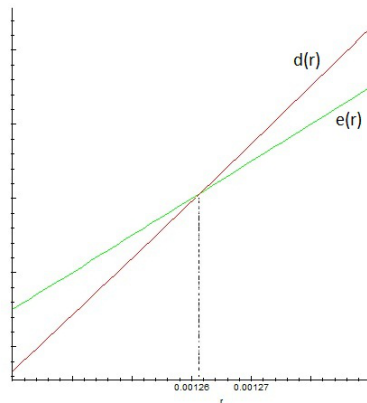


Figura 4.3: Coeficiente de ajustamento para $X \sim \text{Bin}(3000, 0.25)$.

Na Tabela 4.3 encontra-se o valor da probabilidade de ruína $\psi(u)$, mediante diferentes valores de capital inicial u , obtido pela Desigualdade de Lundberg.

u	500	1000	2000	5000	10000	15000	20000
$\psi(u)$	0.5326	0.2837	0.0805	1.8e-3	3.4e-6	6.2e-9	1.1e-11

Tabela 4.3: Majorante para a probabilidade de ruína para $X \sim \text{Bin}(3000, 0.25)$.

Como seria de esperar, a probabilidade de ruína é tanto menor quanto maior o capital inicial.

4.2 Indemnização particular absolutamente contínua

Simulação 4.2.1. (Distribuição Exponencial) Vai-se considerar que as indemnizações particulares, $\{X_i\}_{i \geq 1}$ são identicamente distribuídas a uma variável aleatória X com distribuição Exponencial cuja média $\mu = 750$ (o parâmetro da distribuição Exponencial é $\beta = \frac{1}{750}$). É possível obter um valor aproximado para o coeficiente de ajustamento

necessário para o cálculo da probabilidade de ruína $R = \beta - \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{750} - \frac{0.2}{250} = 0.00053$. Tal resulta de verificar que por definição, R é solução da equação (3.2.4) e a função geradora de momentos $M_X(r)$ neste caso é dada por $M_X(r) = \frac{\frac{1}{750}}{\frac{1}{750} - r}$, veja a Tabela 2.6. Ou seja, R é a única solução positiva da equação:

$$250r = 0.2 \left(\frac{1/750}{1/750 - r} - 1 \right).$$

A equação anterior pode ser manipulada, donde se chega a $R = 0.00053$. Alternativamente, pode-se obter um valor aproximado para R usando os seguintes comandos em Maple:

$$\left| \begin{array}{l} > e(r) := 250 * r; \\ > d(r) := 0.2 * ((1/750)/((1/750) - r) - 1); \\ > plot([e(r), d(r)], r = 0.00047..0.0006, color = [green, red]); \end{array} \right|$$

A figura que se obtém é

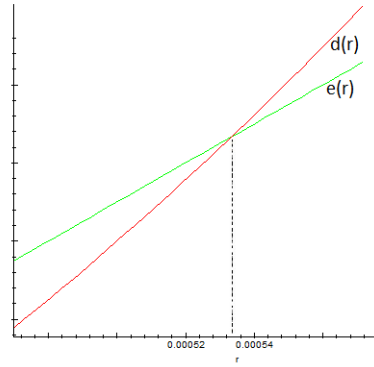


Figura 4.4: Coeficiente de ajustamento para $X \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{750}\right)$.

O caso exponencial é a única situação onde se calcula uma estimativa para a probabilidade de ruína através da Desigualdade de Lundberg, mas também o seu valor exato usando a definição de probabilidade de ruína, veja o Exemplo 3.2.13. Na Tabela 4.4 encontra-se o valor exato da probabilidade de ruína que se denota por $\psi_E(u)$, o valor estimado, obtido pela Desigualdade de Lundberg ($\psi(u)$) assim como o erro associado a cada uma das estimativas.

u	500	1000	2000	5000	10000	15000	20000
$\psi_E(u)$	0.4596	0.3520	0.2065	0.0417	2.9e-3	2.0e-4	1.4e-5
$\psi(u)$	0.7659	0.5866	0.3442	0.0695	4.8e-3	3.4e-4	2.3e-5
$\mathcal{E}(u)$	0.3063	0.2346	0.1377	0.0278	1.9e-3	1.4e-4	6e-6

Tabela 4.4: Majorante para a probabilidade de ruína, valor exato e erro relativo para $X \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{750}\right)$.

Acima, $\mathcal{E}(u) = \psi(u) - \psi_E(u)$, ou seja, o erro da estimativa obtida através da Desigualdade de Lundberg.

Pela tabela é possível verificar que a Desigualdade de Lundberg leva a valores superiores ao valor exato de probabilidade de ruína. E o erro relativo é menor quanto maior o valor do capital inicial u .

Simulação 4.2.2. (Distribuição Uniforme) Vai-se considerar que as indemnizações particulares são identicamente distribuídas a uma variável aleatória X com distribuição Uniforme, vão-se estudar duas situações, nomeadamente $\mathcal{U}[0, 1500]$ e $\mathcal{U}[300, 1200]$. Ambas as distribuições satisfazem $E[X] = 750$.

Para $X \sim \mathcal{U}[0, 1500]$, é possível obter $R \approx 0.0009$, ou seja, R é a única solução positiva de

$$1500 \times 250 \times r^2 = 0.2(e^{1500r} - 1 - 1500r).$$

Tal resulta de verificar que por definição, R é solução da equação (3.2.4) e a função geradora de momentos $M_X(r)$ neste caso é dada por $M_X(r) = \frac{e^{1500r} - 1}{1500r}$, veja a Tabela 2.6. O coeficiente de ajustamento obtém-se utilizando as seguintes linhas de código.

```
> e(r) := 1500 * 250 * (r^2);
> d(r) := (0.2) * (exp(1500 * r) - 1 - 1500 * r);
> plot([e(r), d(r)], r = 0.0005..0.0012, color = [green, red]);
```

Obtém-se a figura,

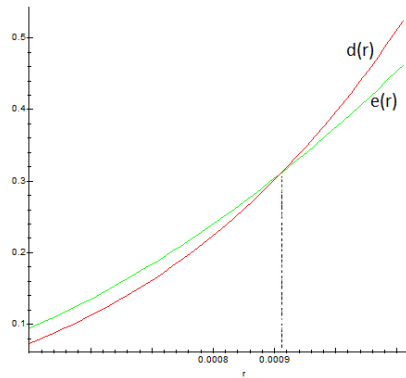


Figura 4.5: Coeficiente de ajustamento para $X \sim \mathcal{U}[0, 1500]$.

Na Tabela 4.5 encontra-se o valor da probabilidade de ruína $\psi(u)$, mediante diferentes valores de capital inicial u , obtido pela Desigualdade de Lundberg.

u	500	1000	2000	5000	10000	15000	20000
$\psi(u)$	0.6376	0.4066	0.1653	0.0111	1.2e-4	1.4e-6	1.5e-8

Tabela 4.5: Majorante para a probabilidade de ruína para $X \sim \mathcal{U}[0, 1500]$.

Para $X \sim \mathcal{U}[300, 1200]$, é possível obter $R \approx 0.0011$, ou seja R é a única solução positiva da equação

$$250 * (1200 - 300)r^2 = 0.2(e^{1200r} - e^{300r} - (1200 - 300)r).$$

Tal resulta de verificar que por definição, R é solução da equação (3.2.4) e neste caso a função geradora de momentos $M_X(r)$ é dada por $M_X(r) = \frac{e^{1200r} - e^{300r}}{900r}$, veja a Tabela 2.6. É possível calcular o coeficiente de ajustamento usando as seguintes linhas de código.

```

> e(r) := 900 * 250 * (r^2);
> d(r) := (0.2) * (exp(1200 * r) - exp(300 * r) - 900 * r);
> plot([e(r), d(r)], r = 0.001..0.0012, color = [green, red]);

```

Desta forma, obtém-se a seguinte figura.

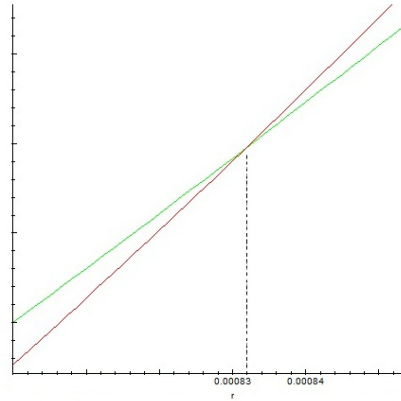


Figura 4.6: Coeficiente de ajustamento para $X \sim \mathcal{U}[300, 1200]$.

Na Tabela 4.6 encontra-se o valor da probabilidade de ruína $\psi(u)$, mediante diferentes valores de capital inicial u , obtido pela Desigualdade de Lundberg.

u	500	1000	2000	5000	10000	15000	20000
$\psi(u)$	0.5769	0.3329	0.1108	4.1e-3	1.7e-5	6.8e-8	2.8e-10

Tabela 4.6: Majorante para a probabilidade de ruína para $X \sim \mathcal{U}[300, 1200]$.

Em ambas as situações, $\mathcal{U}[0, 1500]$ e $\mathcal{U}[300, 1200]$, a probabilidade de ruína é tanto menor quanto maior o capital inicial.

Simulação 4.2.3. (Distribuição Normal) Vai-se considerar que as indenizações particulares são identicamente distribuídas a uma variável aleatória X com distribuição Normal de média 750 e desvio-padrão 50, pode-se então encontrar o valor $R \approx 0.0012$, ou seja R é a única solução positiva da equação

$$250r = 0.2 \left(e^{750r + \frac{1}{2} \times 50r^2} - 1 \right).$$

Tal resulta de verificar que por definição, R é solução da equação (3.2.4) e a função geradora de momentos $M_X(r)$ neste caso é dada por $M_X(r) = e^{750r + \frac{1}{2} \times 50r^2}$, veja a Tabela 2.6. O coeficiente de ajustamento pode ser obtido usando os seguintes comandos:

```

> e(r) := 250 * r;
> d(r) := (0.2) * (exp(750 * r + 25 * (r^2)) - 1);
> plot([e(r), d(r)], r = 0.001..0.0015, color = [green, red]);

```

Obtém-se a seguinte figura.

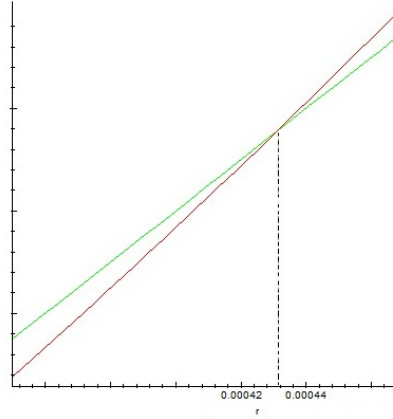


Figura 4.7: Coeficiente de ajustamento para $X \sim \mathcal{N}(750, 50)$.

Na Tabela 4.7 encontra-se o valor da probabilidade de ruína $\psi(u)$, mediante diferentes valores de capital inicial u , obtido pela Desigualdade de Lundberg.

u	500	1000	2000	5000	10000	15000	20000
$\psi(u)$	0.5326	0.2837	0.0805	1.8e-3	3.4e-6	6.2e-9	1.1e-11

Tabela 4.7: Majorante para a probabilidade de ruína para $X \sim \mathcal{N}(750, 50)$.

Como seria de esperar, a probabilidade de ruína é tanto menor quanto maior o capital inicial.

Simulação 4.2.4. (Distribuição Gamma) Vai-se considerar que as indemnizações particulares são identicamente distribuídas a uma variável aleatória X com distribuição $\text{Gamma}(1500, 2)$, é possível então encontrar o valor $R \approx 0.00126$, única solução positiva da equação

$$250r = 0.2 \left[\left(\frac{2}{2-r} \right)^{1500} - 1 \right].$$

Tal resulta de verificar que por definição, R é solução da equação (3.2.4) e a função geradora de momentos $M_X(r)$ neste caso é dada por $M_X(r) = \left(\frac{2}{2-r} \right)^{1500}$, veja a Tabela 2.6. Note que neste caso também se tem que $E[X] = 750$. O coeficiente de ajustamento pode ser obtido através das seguintes linhas de comando:

```

> e(r) := 250 * r;
> d(r) := (0.2) * (((2/(2 - r))1500) - 1);
> plot([e(r), d(r)], r = 0.0012..0.00132, color = [green, red]);

```

Obtém-se a seguinte figura.

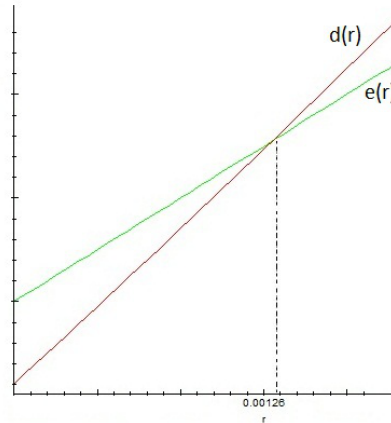


Figura 4.8: Coeficiente de ajustamento para $X \sim \text{Gamma}(1500, 2)$.

Na Tabela 4.8 encontra-se o valor da probabilidade de ruína $\psi(u)$, mediante diferentes valores de capital inicial u , obtido pela Desigualdade de Lundberg.

u	500	1000	2000	5000	10000	15000	20000
$\psi(u)$	0.5321	0.2831	0.0801	1.8e-3	3.3e-6	6.0e-9	1.1e-11

Tabela 4.8: Majorante para a probabilidade de ruína para $X \sim \text{Gamma}(1500, 2)$.

Verifica-se, analisando a tabela, que a probabilidade de ruína é tanto menor quanto maior o capital inicial.

4.3 Apresentação dos dados

Para permitir a comparação entre os valores dos majorantes da probabilidade de ruína, para as diversas distribuições das indemnizações particulares, nos vários valores de capital inicial, optou-se pela representação gráfica dos mesmos. Por se tratarem de majorantes, não há qualquer indicação de que os valores reais de probabilidade relacionados com as simulações apresentadas estejam relacionadas da mesma forma que os majorantes. Assim, a figura seguinte permite analisar as diferenças dos valores dos majorantes da probabilidade para os casos em que as indemnizações particulares seguem as distribuições

discretas analisadas atrás, Poisson de parâmetro 750, Geométrica de parâmetro $\frac{1}{750}$ e Binomial de parâmetros 3000 e 0.25.

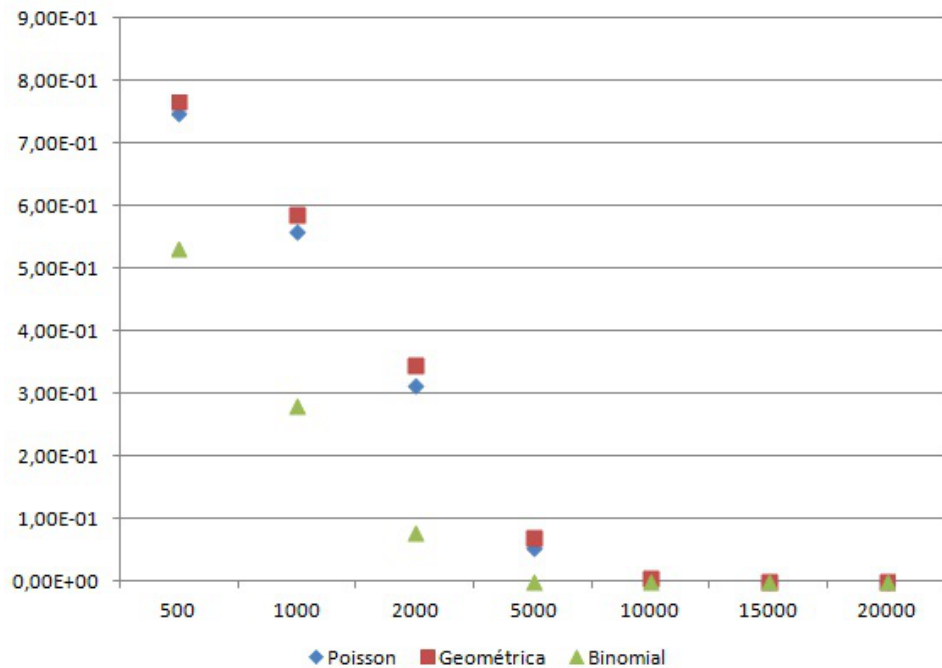


Figura 4.9: Comparação do majorante da probabilidade de ruína entre algumas distribuições discretas.

Verifica-se que independentemente da distribuição, há um decréscimo acentuado do majorante da probabilidade de ruína com o progressivo aumento do capital inicial.

A Figura 4.10 permite comparar os valores dos majorantes da probabilidade de ruína nos casos em que as indemnizações particulares seguem distribuições absolutamente contínuas. Assim estão representados os casos estudados atrás, ou seja, Exponencial de parâmetro $\frac{1}{750}$, Uniforme em $[0, 1500]$ (Uniforme1), Uniforme em $[300, 1200]$ (Uniforme2), Normal de parâmetros 750 e 50 e Gamma de parâmetros 1500 e 2.

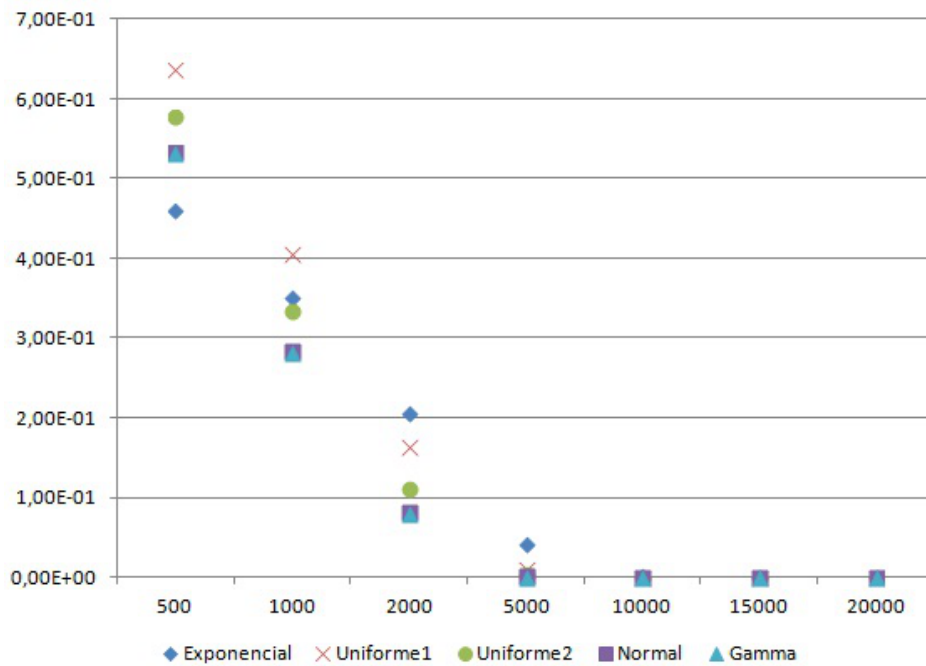


Figura 4.10: Comparação do majorante da probabilidade de ruína entre algumas distribuições contínuas.

De forma semelhante aos casos de indenizações particulares com distribuições discretas, os majorantes das probabilidades de ruína são decrescentes à medida que o valor do capital inicial aumenta, independentemente da distribuição de X . Note-se a trajetória dos valores da probabilidade na distribuição Exponencial. Esta é a distribuição com menor probabilidade de ruína para o capital inicial $u = 500$, abaixo de 50%, e com o aumento do valor do capital inicial há uma clara diminuição da probabilidade de ruir, mas em relação às outras distribuições analisadas, a descida é menor. Por exemplo, a probabilidade de ruir para o capital inicial $u = 2000$ é inferior a 10% no caso em que as indenizações particulares seguem uma distribuição Gamma, enquanto que no caso Exponencial, a probabilidade apenas toma este valor, 10% para o capital inicial $u = 5000$.

Capítulo 5

Análise de uma base de dados

Neste capítulo será apresentada a análise de dados de uma seguradora em funcionamento atualmente. Esta análise passará pela descrição de todos os dados fornecidos e dos dados referentes à atividade seguradora no ramo automóvel, como também a análise da probabilidade de ruína e estimativa do capital. Os valores estão apresentados em unidades de k euros, ou seja, na unidade milhares de euros.

5.1 Descrição dos dados

Os dados analisados provêm da atividade da seguradora entre Janeiro de 1999 e Dezembro de 2011, com indemnizações referentes a carteiras de acidentes de trabalho, acidentes pessoais, saúde, incêndio e outros danos, automóvel, transportes, responsabilidade civil e diversos.

Encontra-se na Tabela 5.1 uma análise descritiva simples dos valores das indemnizações mensais de cada um dos anos, não analisando nenhuma carteira em especial.

Verifica-se que no ano 2002 foi registado o montante de indemnização mensal mais baixo, assim como o mais elevado. O ano 1999 foi o ano com a indemnização média mensal mais baixa.

Ano	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	1999-2011
Mínimo	11845	13229	14477	8274	10388	12076	13659	13515	13612	13508	16379	19272	18599	8274
1º Quartil	13029	15064	18379	16499	15455	14511	14793	13797	15513	16898	17631	20399	19692	15713
Mediana	15728	17579	19808	17830	19394	16670	15766	15386	17717	17702	20357	22377	21959	18207
Média	15459	17414	19355	19298	17947	16168	15969	15879	17482	18180	19688	22951	21587	18260
2º Quartil	17895	19965	20554	22484	20801	17878	16591	17237	19067	19717	20900	24751	23361	20591
Máximo	18699	21298	23605	30206	22725	19285	18855	19444	21494	22216	23371	30437	24146	30437
Total	185506	208970	232261	231575	215368	194012	191628	190553	209780	218159	236259	275409	259049	2848528

Tabela 5.1: Valor (em k euros) das indemnizações da seguradora em estudo.

Em relação ao valor dos prémios mensais de cada ano, verifica-se pela Tabela 5.2 que 2009 foi o ano que registou o mais baixo montante de prémio mensal, e 2011 o mais alto valor de prémio mensal da seguradora. O prémio mensal médio mais alto foi registado em 2007.

Ano	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	1999-2011
Mínimo	19981	20551	21008	18933	20899	22528	24623	24069	23811	22101	18377	20693	21519	18377
1º Quartil	21555	22351	23590	23407	24340	23984	25784	25157	25406	23330	21926	22328	21981	23183
Mediana	23309	22969	25310	25317	26643	28035	29499	30480	30008	29204	26908	26664	25737	26037
Média	24244	25743	27227	26929	27420	28881	30634	31723	31772	30356	28986	29138	28525	28583
3º Quartil	25173	26807	29449	28038	30348	31077	33379	34125	34056	31618	32323	31546	30327	31125
Máximo	38189	42464	45904	44660	38901	42982	46052	49773	50180	50147	50800	52316	53238	53238
Total	290930	308920	326725	323148	329041	346569	367608	380679	381265	364275	347833	349655	342297	4458946

Tabela 5.2: Valor (em k euros) dos prémios da seguradora em estudo.

O número de indemnizações ocorridas, por ano, entre 1999 e 2011 encontra-se descrito na Tabela 5.3. Constata-se que em 2003 houve o menor número de indemnizações, enquanto que em 2010 ocorreu o maior número de indemnizações na seguradora em estudo. É nítido o crescimento do número de indemnizações ao longo do período em estudo.

Ano	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	1999-2011
Mínimo	7248	8224	9229	8859	6796	9806	7304	7848	9333	11668	12985	12230	12801	6796
1º Quartil	12821	12694	13073	12125	11478	13155	15965	18226	18680	18904	21814	24213	24076	13247
Mediana	13163	13517	14405	13246	13552	15287	17579	21684	22197	23080	25762	29344	28201	13247
Média	12840	13016	13975	13598	12629	15486	17366	20157	20487	21978	24694	27650	26173	18465
3º Quartil	14096	14074	15231	15582	14386	17320	19291	24039	23794	25011	28509	32093	29995	23587
Máximo	14801	14879	16599	17454	16104	23212	26037	26000	25406	30716	30935	38994	37070	38994
Total	154082	156192	167704	163178	151550	185831	208392	241881	245844	263733	296322	331794	314079	2880582

Tabela 5.3: Número de indemnizações da seguradora em estudo.

De forma a comparar os montantes dos prémios e das indemnizações, em cada um dos anos analisados, recorreu-se a um gráfico de barras, Figura 5.1. Verifica-se que em cada um dos anos, o valor dos prémios é sempre superior ao valor das indemnizações.

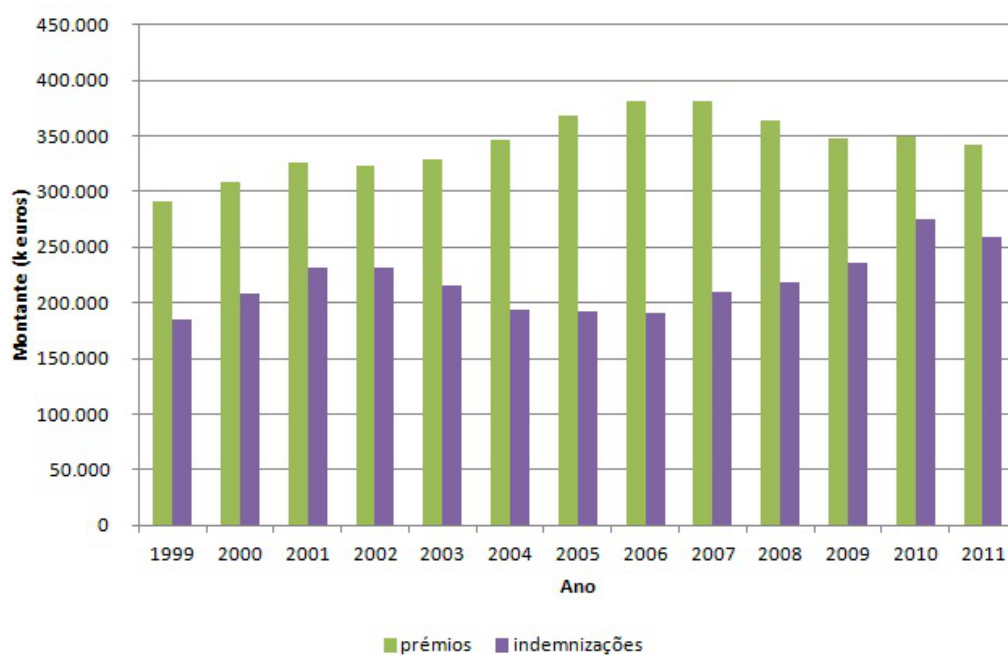


Figura 5.1: Comparação entre os valores dos prémios e das indemnizações.

A figura seguinte permite analisar a evolução do número de indemnizações ocorridas no período em estudo, 1999 a 2011. Nota-se um claro aumento ao longo dos anos, excetuando-se dois períodos, de 2001 a 2003, e 2010 a 2011.

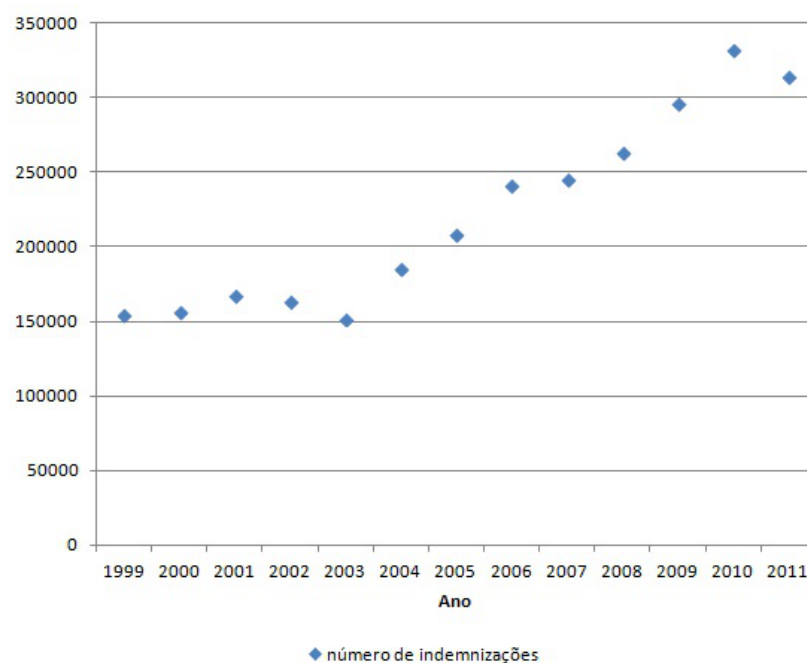


Figura 5.2: Evolução do número de indemnizações.

Tendo em conta que a carteira de seguros automóvel é uma das mais conhecidas e com mais interpretabilidade, optou-se analisar a mesma conforme o modelo apresentado no Capítulo 3, segue-se a análise descritiva dos valores mensais referentes às indemnizações, prémios e número de sinistros relativos apenas à carteira de seguros referida, da seguradora em estudo, no período decorrido entre Janeiro de 1999 e Dezembro de 2011.

Verifica-se pela análise da Tabela 5.4 que 2002 foi o ano que registou o menor assim como o maior valor de indemnização mensal relativo à carteira de seguros automóvel. O montante de indemnização mensal médio mais baixo foi registado no ano 2006.

Ano	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	1999-2011
Mínimo	7670	8085	8628	4267	5800	6334	7990	7200	6920	7425	7503	8770	9192	4267
1º Quartil	8.672	9.756	10.539	9.276	8683	7.663	8375	7902	8717	8472	9563	9851	9946	8765
Mediana	9063	11194	12053	10485	10741	8977	9042	8508	9877	9.635	10.159	10443	10.677	10.033
Média	9861	11045	11980	12036	10467	9159	9119	8770	9760	9.711	10080	10.763	10963	10.86
3º Quartil	11022	11750	12912	13806	12.872	11.031	9.437	9.779	10726	10660	10569	11400	1897	11584
Máximo	12824	14804	16379	21.703	13959	12199	11711	10792	11741	12808	12320	13117	13446	21703
Total	118338	132543	143756	144432	125601	109911	109427	105243	117122	116536	120961	129159	131561	1604590

Tabela 5.4: Valor (em k euros) das indemnizações relativas à carteira de seguros automóvel.

Constata-se pela Tabela 5.5 que o valor de prémio mensal relativo à carteira de seguros automóvel associados ao ano 2010 foi o mais baixo de todos os anos analisados, enquanto que o valor mensal mais alto foi registado no ano 2007. Em 2006 houve o registo do montante médio de prémio mensal mais elevado, de todos os anos estudados.

Ano	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	1999-2011
Mínimo	12001	12864	12385	12287	12804	13747	14763	15495	14607	12974	12233	11628	11861	11628
1º Quartil	12975	13135	13728	13482	14442	14768	15965	16114	15231	14056	12582	13302	12850	13473
Mediana	13451	13623	14463	14856	14732	15404	16578	16943	16157	14895	13118	13582	13300	14961
Média	13878	14248	15000	14609	15112	16248	17140	17628	17085	15739	14747	14946	14434	15447
3º Quartil	14198	14501	15690	15568	15186	16469	16935	17239	16836	15848	15127	15519	14376	16401
Máximo	17373	18134	19143	16221	20332	23248	23878	26337	27830	25024	25309	25676	23251	27830
Total	166532	170978	179998	175308	181345	194982	205682	211534	205024	188873	176962	179351	173209	2409779

Tabela 5.5: Valor (em k euros) dos prémios relativos à carteira de seguros automóvel.

Relativamente ao número de indemnizações mensais ocorridos referente à carteira de seguros automóvel, é possível analisar na Tabela 5.7 que houve em 2003 o menor número de indemnizações mensais dos 13 anos estudados, e o maior número de indemnizações mensais ocorreu em 2010. A média do número de indemnizações mensais foi crescente nos 13 anos analisados, excetuando-se os anos 2002 e 2003, onde houve um decréscimo.

Ano	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	1999-2011
Mínimo	3396	4090	5116	4992	2269	3684	3952	4256	4513	5203	5515	5667	5963	2269
1º Quartil	6494	6488	6586	6445	4868	6090	6273	6421	6332	7124	8470	8486	7855	6419
Mediana	6698	6879	7017	6768	6036	6460	6522	6917	7339	7814	8770	9455	8956	6943
Média	6442	6666	6966	6751	5503	6177	6243	6694	7138	7614	8565	9303	8623	7129
3º Quartil	6936	7164	7681	7409	6448	6710	6663	7407	8093	8263	8981	10649	9713	8004
Máximo	7283	7638	8013	7670	6817	6932	7105	8033	8475	8876	10041	11268	10180	11268
Total	77299	79994	83592	81007	66033	74120	74914	80322	85660	91367	102782	111639	103470	1112199

Tabela 5.6: Número de indemnizações relativas à carteira de seguros automóvel.

De forma similar ao que aconteceu na análise comparativa entre o valor dos prémios e das indemnizações sem particularizar nenhuma carteira de seguros, verifica-se pela Figura seguinte que o montante das indemnizações é sempre inferior ao que a seguradora recebe de prémio, independentemente do ano. É nítida a discrepância entre valor de prémio e de indemnização nos anos 2005 e 2006, onde o valor dos prémios ultrapassa em muito o valor das indemnizações.

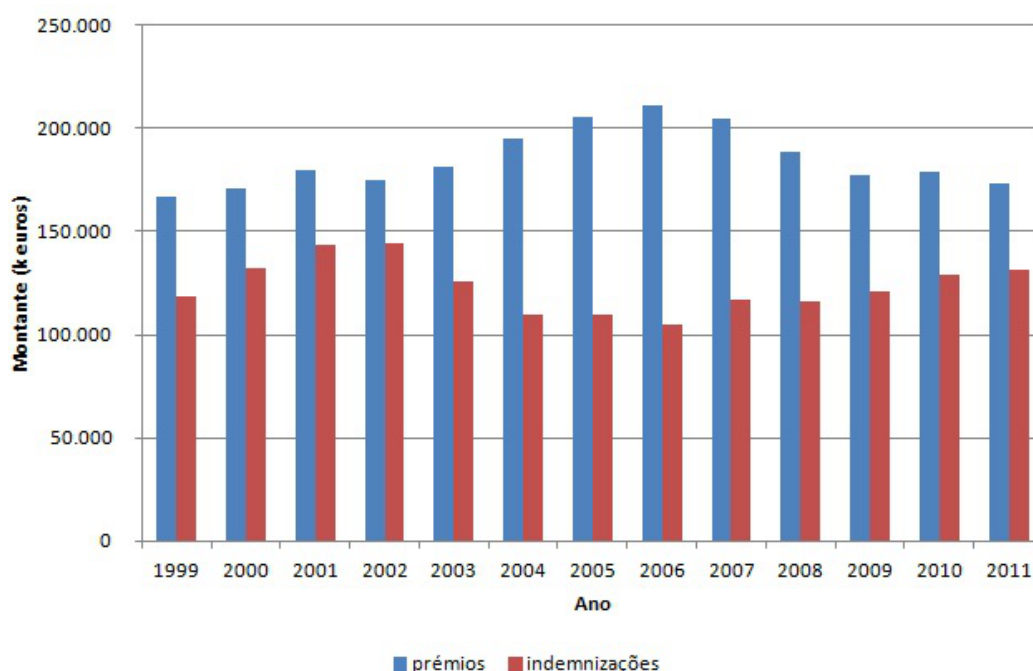


Figura 5.3: Comparação entre o valor dos prémios e das indemnizações relativos à carteira de seguros automóvel.

O número de indemnizações relacionadas com a carteira de seguros automóvel pode ser analisado através da Figura que se segue. Verifica-se que há um aumento ao longo dos anos, excetuando-se os períodos de 2001 a 2003, e 2010 a 2011.

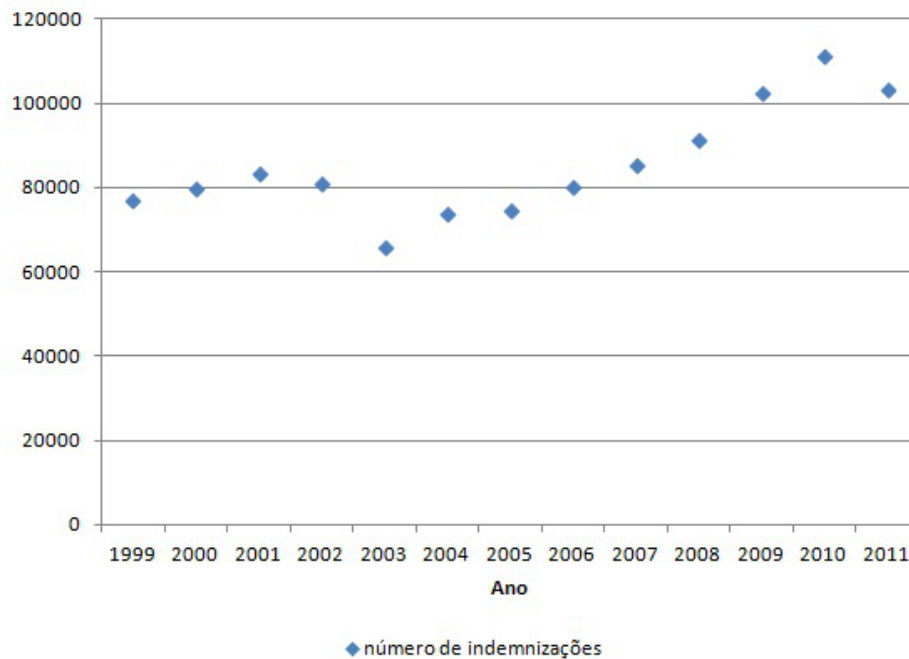


Figura 5.4: Evolução do número de indemnizações relativas à carteira de seguros automóvel.

5.2 Probabilidade de ruína

Pretende-se agora analisar qual a probabilidade de ruína da seguradora, considerando apenas a carteira de seguros automóvel. Recorre-se então à Desigualdade de Lundberg, veja o Lema 3.1.18 e assume-se que o tempo é discreto, uma vez que se considera o mês como unidade de tempo.

É necessário primeiramente encontrar o coeficiente de ajustamento, essencial para o cálculo das estimativas da probabilidade de ruína. Recorre-se desta forma à expressão (3.1.5), ou seja, $M_S(r) = e^{rc}$, onde se desconhece a distribuição das indemnizações, isto é, a distribuição de S . Desta forma, opta-se pelo agrupamento dos dados em classes e posterior cálculo da função geradora de momentos, $M_S(r)$, relembre a Secção 2.4. Além disso, é necessário conhecer a taxa relativa ao valor dos prémios, pelo que se consegue uma estimativa $\hat{c} = 15447$, média do valor dos prémios mensais registados durante os anos 1999 a 2011.

Antes de prosseguir deve lembrar que o agrupamento de dados em classes deve seguir um conjunto de regras:

- As classes não têm pontos em comum.
- O número de classes N é calculado pela regra de Sturges. $N = I(\log_2 n) + 1$, onde

$I(x)$ representa a parte inteira do número x , e sem esquecer que $\log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}$.

- Sempre que possível as classes devem ter igual amplitude, diferença entre o seu limite superior e o seu limite inferior, definida por: $h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{N}$, com x_{\max} e x_{\min} os valores máximo e mínimo observados. Os intervalos são abertos à esquerda e fechados à direita.
- No caso de ser necessário aproximar o valor de h , esta aproximação deve ser feita por excesso. Este excesso ε deve ser redistribuído uniformemente por todas as classes. Assim, $\varepsilon = N \times h - (x_{\max} - x_{\min})$. A primeira classe deve começar em $x_{\min} - \frac{\varepsilon}{2}$ e é adicionada sempre a quantidade h .

Cada classe tem um ponto muito importante: o seu ponto médio x_i^* . O ponto médio de uma classe é a média aritmética dos limites inferior e superior da classe. Atendendo a que se espera que as observações se distribuam uniformemente dentro de cada classe, pode-se dizer que o ponto médio x_i^* é o representante lógico da classe i .

A frequência relativa de cada classe é calculada através do quociente entre o número de valores que pertencem a cada classe e o número total de observações.

Na tabela seguinte encontram-se as classes obtidas através da regra de Sturges, ponto médio de cada classe e frequência relativa associada.

Classe	Ponto médio	Frequência relativa
] 4265 ; 6445]	5355	0.02564103
] 6445 ; 8625]	7535	0.19871795
] 8625 ; 10805]	9715	0.44871795
] 10805 ; 12985]	11895	0.25000000
] 12985 ; 15165]	14075	0.05128205
] 15165 ; 17345]	16255	0.01282051
] 17345 ; 21705]	19525	0.01282051

Tabela 5.7: Classes das indemnizações relativas à carteira de seguros automóvel.

Recorre-se ao software Maple para encontrar um valor aproximado do coeficiente de ajustamento, através das seguintes linhas de comando:

```

> e(r) := (exp(5355 * r)) * 0.02564103 + (exp(7535 * r)) * 0.19871795 +
(exp(9715 * r)) * 0.44871795 + (exp(11895 * r)) * 0.25 + (exp(14075 * r)) * 0.05128205 +
(exp(16255 * r)) * 0.01282051 + (exp(19525 * r)) * 0.01282051;
> c := 15447;
> d(r) := exp(c * r);
> plot([e(r), d(r)], r = 0.00102..0.00108, color = [green, red]);

```

Obtem-se então a seguinte representação gráfica.

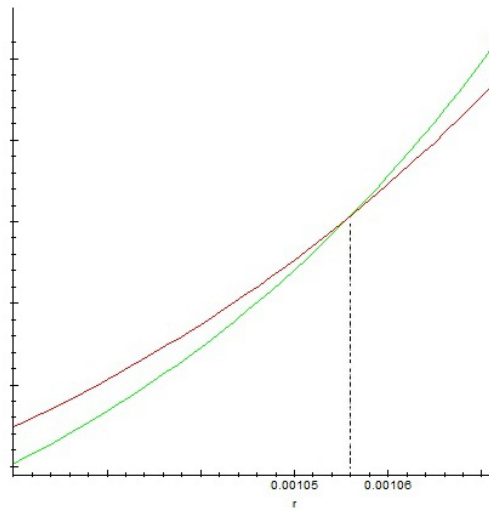


Figura 5.5: Coeficiente de ajustamento relativo à base de dados reais.

Conclui-se que o coeficiente de ajustamento, no dados analisados, toma o valor aproximado $R \approx 0.001056$.

Em seguida vai-se efetuar o cálculo da estimativa da probabilidade de ruína através da Desigualdade de Lundberg, $\psi(u) < e^{-Ru}$, veja o Lema 3.2.9. Relembre que para este cálculo é necessário o capital inicial u da seguradora. Apesar deste valor ter sido disponibilizado, no entanto é referente à totalidade de carteiras de seguros da seguradora, pelo que se optou por analisar as estimativas de $\psi(u)$ para diferentes valores de capital inicial u .

Tendo em conta que a média das indemnizações mensais toma o valor $E[S] = 10286$ e a estimativa da taxa relativa aos prémios é de $\hat{c} = 15447$, confirma-se que a hipótese (3.2.2) se verifica, uma vez que $\hat{c} > E[S]$.

Na Tabela 5.8 encontram-se as estimativas para a probabilidade de ruína $\psi(u)$, obtidas através da Desigualdade de Lundberg, para diferentes valores de capital inicial u (em k euros).

u	500	1000	2000	5000	10000	50000	100000
$\psi(u)$	0.5898	0.3478	0.1210	5.1e-3	2.6e-5	1.2e-23	1.4e-46

Tabela 5.8: Majorante para a probabilidade de ruína para diferentes valores de capital inicial u

Facilmente se constata que a probabilidade de ruína diminui quanto maior é o valor do capital inicial.

5.3 Estimativa do capital

Uma informação muito importante relativa à seguradora, diz respeito ao valor do capital da inicial de 1999, 2000 e 2011, não particularizando nenhuma carteira de seguros. Decidiu-se então estimar o capital de 2011, tendo em conta o capital de 2000, mas particularizando a carteira de seguros automóvel. Recorreu-se à expressão (3.1.1) para calcular o capital ao fim de 11 anos, sabendo que

- A estimativa do capital da seguradora relativo à carteira de seguros automóvel, em k euros, em 2000 foi de $u = 9500$.
- A média dos valores de prémio de 1999 e 2000, em k euros, foi de $\hat{c} = 168755$.
- A média dos montantes das indemnizações de 1999 e 2000, em k euros, foi de $\mu = 125440$.

Tendo os dados necessários para o cálculo do capital em 2011, efetuou-se o seguinte cálculo

$$U(11) = 9500 + 11 \times 168755 - 11 \times 125440 = 485967,$$

valor bastante superior à estimativa do capital da carteira de seguros automóvel da seguradora em 2011, 13000 k euros.

As razões que levam a esta discrepância de valores são simples, o modelo não considera despesas da seguradora de cariz administrativo, salários, rendas, investimentos, entre outros, assim como o fato de não se conhecer exatamente o capital referente apenas à carteira de seguros automóvel.

Capítulo 6

Notas finais

A Teoria da Ruína é de grande importância nas Ciências Atuariais, na medida em que auxilia as seguradoras no cálculo dos prémios e indemnizações para evitar a ruína das mesmas, ou seja, tem um papel fundamental na tomada de decisões no tempo certo.

No desenvolvimento deste trabalho, houve a necessidade de investigar diversos conceitos matemáticos, nomeadamente variável aleatória, função geradora de momentos, função característica, processo estocástico, esperanças condicionais e martingais, de forma a tornar este trabalho o mais auto-contido possível. O Capítulo 2 é o resultado desta análise essencial.

No Capítulo 3 deste trabalho, fez-se uma primeira abordagem à Teoria de Risco ligada ao Ramo Não-Vida das Ciências Atuariais. Obtiveram-se resultados interessantes e úteis no que diz respeito à teoria da ruína, não só no modelo em tempo discreto como também no modelo em tempo contínuo, em que se recorreu a duas abordagens diferentes em ambos os casos.

Apesar da modelação da distribuição das indemnizações nem sempre ser a adequada, conseguiu-se no Capítulo 4 analisar os diferentes valores de probabilidade de ruína para vários casos, e concluiu-se, como verificado no Capítulo 3, que independentemente da distribuição assumida, a probabilidade de uma companhia de seguros ruir é tanto maior quanto menor for o capital inicial da mesma. Para possibilitar comparação das estimativas da probabilidade de ruína para diferentes valores de capital inicial, atribuiu-se valores comuns a parâmetros como média das indemnizações, número de indemnizações por unidade de tempo e taxa constante referente aos prémios, independentemente da distribuição assumida para as indemnizações particulares. E como a estimativa da probabilidade de ruína requer o conhecimento do coeficiente de ajustamento, recorreu-se ao MAPLE.

A análise de uma base de dados real proveniente de uma grande seguradora, atualmente em funcionamento, apresentada no Capítulo 5 permitiu a aplicação prática de

alguns dos resultados obtidos anteriormente. Tendo em conta a grande quantidade de dados fornecida, optou-se pelo modelo em tempo discreto, uma vez que seria muito complexa a análise das indemnizações particularizando por cliente. Assim, não se assumiu qualquer distribuição teórica para as indemnizações agregadas, optando-se por agrupar os dados em classes de forma a construir a função geradora de momentos, e desta forma poder encontrar o coeficiente de ajustamento para calcular a estimativa da probabilidade de ruína.

Uma das limitações do modelo clássico, muito utilizado nas Ciências Atuariais, é relativa ao facto de se assumir independência de algumas variáveis, como o número de indemnizações ou até o montante das indemnizações, o que nem sempre é realista, bastando para tal pensar num exemplo prático, como por exemplo os danos causados por uma tempestade que afeta uma determinada área residencial deverão ser semelhantes e por conseguinte ter montantes de indemnização semelhantes. Conseguiu-se, neste trabalho, obter um resultado para a probabilidade de ruína sem a imposição da independência das indemnizações agregadas.

Bibliografia

- [1] Bowers N., Gerber H., Hickman J., Jones D., Nesbitt C. - Actuarial Mathematics, The Society of Actuaries, 1997.
- [2] Centeno, L. - Teoria do Risco na Atividade Seguradora. Oeiras, Celta Editora, 2003.
- [3] Chung, K. - A Course in Probability Theory, 2nd ed. New York, Academic Press, 1974.
- [4] James, B. - Probabilidade: um curso em nível intermediário. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1981.
- [5] Karlin, S. e Taylor, H. - A first course in stochastic processes. Academic Press, 1975.
- [6] Reis, Alfredo D. E. - Ciências Actuarias: Modelos para Seguros. ISEG-UTL.
- [7] Reis, Alfredo D. E. - Teoria da Ruína. Cemapre.
- [8] Shiriyayev, A. N. - Probability. New York, Springer - Verlag, 1984.